MATEMATIKA

SMA/MA
Kelas
XII

Disklaimer: *Buku ini merupakan buku guru yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku guru ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika / Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- Jakarta : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2015.
viii, 272 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XII
ISBN 978-602-282-103-8 (jilid lengkap)
ISBN 978-602-282-XXX-X (jilid 3)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Kontributor Naskah : Abdur Rahman As'ari, Ipung Yuwono, Makbul Muksar, Tjang Daniel Chandra, Latifah Mustofa L., Latiful Anwar, Nur Atikah, Dahliatul Hasanah, Syaiful Hamzah Nasution, dan Vita Kusumasari.

Penelaah : Agung Lukito, Ali Mahmudi, Kusnandi, dan Turmudi.

Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Cetakan Ke-1, 2015
Disusun dengan huruf Times New Roman, 12 pt.

Kata Pengantar

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanyamatematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian di atas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antarvariabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antarbeberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Buku *Matematika Kelas XII* untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan memberi pengalaman konkret-abstrak kepada siswa seperti uraian di atas. Pembelajaran matematika melalui buku ini akan membentuk kemampuan siswa dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret secara abstrak, menyelesaikan permasalahan abstrak yang terkait, dan berlatih berfikir rasional, kritis dan kreatif.

Sebagai bagian dari Kurikulum 2013 yang menekankan pentingnya keseimbangan kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan, kemampuan matematika yang dituntut dibentuk melalui pembelajaran berkelanjutan yaitu dimulai dengan meningkatkan pengetahuan tentang metode-metode matematika, dilanjutkan dengan keterampilan menyajikan suatu permasalahan secara matematis dan menyelesaikannya, dan bermuara pada pembentukan sikap jujur, kritis, kreatif, teliti, dan taat aturan.

Buku ini menjabarkan usaha minimal yang harus dilakukan siswa untuk mencapai kompetensi yang diharapkan. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, siswa diberanikan untuk mencari dari sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap siswa dengan ketersedian kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan-kegiatan lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Sebagai edisi pertama, buku ini sangat terbuka terhadap masukan dan akan terus diperbaiki dan disempurnakan. Untuk itu, kami mengundang para pembaca untuk memberikan kritik, saran dan masukan guna perbaikan dan penyempurnaan edisi berikutnya. Atas kontribusi tersebut, kami ucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus tahun Indonesia Merdeka (2045).

Jakarta, Januari 2015

Menteri Pendidikan dan Kebudayaan

KURIKULUM 2013

Daftar Isi

Kata Pengantar ii

Daftar Isi vi

Bab 1 Matriks 1

Peta Konsep 3

Subbab 1.1 Determinan Matriks 1×1 4

Subbab 1.2 Menentukan Determinan Matriks 2×2 dan Sifat-sifatnya Menggunakan Kofaktor. 5

Kegiatan 1.2.1 Minor, Kofaktor, dan Determinan Matriks 2×2 ... 5

Kegiatan 1.2.2 Determinan Matriks 2×2. 8

Kegiatan 1.2.3 Sifat-sifat Determinan Matriks 2×2 11

Subbab 1.3. Determinan Matriks 3×3 dan Sifat-Sifatnya 17

Latihan 1.3 30

Subbab 1.4 Invers Matriks 31

Kegiatan 1.4.1 Mengekplorasi Invers Matriks 34

Kegiatan 1.4.2 Menentukan Invers Matriks 42

Latihan 1.4 51

Subbab 1.5 Menyelesaikan Masalah Menggunakan Matriks 52

Kegiatan 1.5.1 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear (SPL) . 52

Kegiatan 1.5.2 Memodelkan dan Menyelesaikan Masalah Sehari-hari yang berkaitan dengan SPL Tiga Variabel Menggunakan Matriks 61

Latihan 1.5. 64

Bab 2 Bunga, Pertumbuhan Dan Peluruhan 71

Peta Konsep 73

Subbab 2.1 Bunga Tunggal Dan Bunga Majemuk 74

Kegiatan 2.1.1 Mengenal Bunga Tunggal dan Bunga Majemuk..74
Kegiatan 2.1.2 Rumus Umum Bunga Tunggal..............................83
Latihan 2.1.2 91
Kegiatan 2.1.3 Rumus Umum Bunga Majemuk...........................92
Latihan 2.1.3. 101
Subbab 2.2 Pertumbuhan dan Peluruhan...103
Kegiatan 2.2.1 Mengenal Pertumbuhan dan Peluruhan................103
Kegiatan 2.2.2 Menentukan Rumus Pertumbuhan dan Peluruhan.110
Latihan 2.2. 122

Bab 3 Induksi Matematika...127
Peta Konsep 129
Subbab 3.1 Induksi Matematis 130
Kegiatan 3.1.1 Penalaran Induktif dan Deduktif 130
Kegiatan 3.1.2 Prinsip Induksi Matematis 139
Kegiatan 3.1.3 Penerapan Induksi Matematis 148
Latihan 3.1 154
Subbab 3.2 Prinsip Induksi Matematis Kuat.....................................158
Kegiatan 3.2.1 Prinsip Induksi Matematis Kuat...........................158
Kegiatan 3.2.2 Penerapan Prinsip Induksi Matematis Kuat 164
Latihan 3.2. 168

Bab 4 Diagonal Bidang, Diagonal Ruang, Bidang Diagonal, Dan Penerapannya...173
Peta Konsep 175
Subbab 4.1 Diagonal Bidang Dan Diagonal Ruang 176
Kegiatan 4.1.1Diagonal Bidang dan Diagonal Ruang..................177
Latihan 4.1.1. 187
Kegiatan 4.1.2 Sifat-Sifat Diagonal Bidang dan Diagonal Ruang.193
Latihan 4.1.2. 197

Subbab 4.2 Bidang Diagonal 199

Latihan 4.2. 207

Bab 5 Integral Tentu 209

Peta Konsep 211

Subbab 5.1 Notasi Sigma, Jumlah Rieman dan Integral Tentu 212

Kegiatan 5.1.1 Menentukan Luas Permukaan Daun 212

Latihan 5.1. 228

Subbab 5.2 Teorema Fundamental Kalkulus. 230

Kegiatan 5.2.1 Teorema Fundamental Kalkulus I 230

Kegiatan 5.2.2 Teorema Fundamental Kalkulus II 236

Latihan 5.2. 243

Subbab 5.3 Penerapan Integral Tentu 245

Latihan 5.3. 263

Glosarium 269

Daftar Pustaka 272

Bab 1

Matriks

Kompetensi Dasar Dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1.1 Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya. 2.1 Menghayati perilaku disiplin, sikap kerjasama, sikap kritis dan cermat dalam bekerja menyelesaikan masalah kontekstual. 3.1 Menganalisis konsep, nilai determinan dan sifat operasi matriks serta menerapkannya dalam menentukan invers matriks dan dalam memecahkan masalah. 4.1 Menyajikan dan menyelesaikan model matematika dalam bentuk persamaan matriks dari suatu masalah nyata yang berkaitan dengan persamaan linear.	Melalui pembelajaran matriks, siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengamati dan menemukan konsep determinan matriks beserta sifat operasi determinan matriks. 2. Mengamati dan menemukan konsep invers dari matriks. 3. Menerapkan konsep matriks dalam menyelesaikan masalah sehari-hari.

Sumber : http//www.dreamstime.com

Biografi Grabiel Cramer

Sumber: wikipedia.org

Gabriel Cramer (1704 – 1752) adalah seorang ahli matematika dari Swiss. Meski Cramer tidak digolongkan sebagai ahli matematika terbesar pada zamannya, tetapi kontribusinya sebagai pemilah gagasan-gagasan matematis telah memberinya posisi terhormat dalam sejarah matematika. Cramer melakukan banyak perjalanan dan bertemu dengan banyak ahli matematika terkemuka pada masa itu.

Hasil karya Cramer yang paling terkenal adalah *Introduction al'analyse des lignes courbes algebriques* (1750), yang merupakan studi dan klasifikasi kurva-kurva aljabar dimana *aturan Cramer* muncul dalam lampirannya.

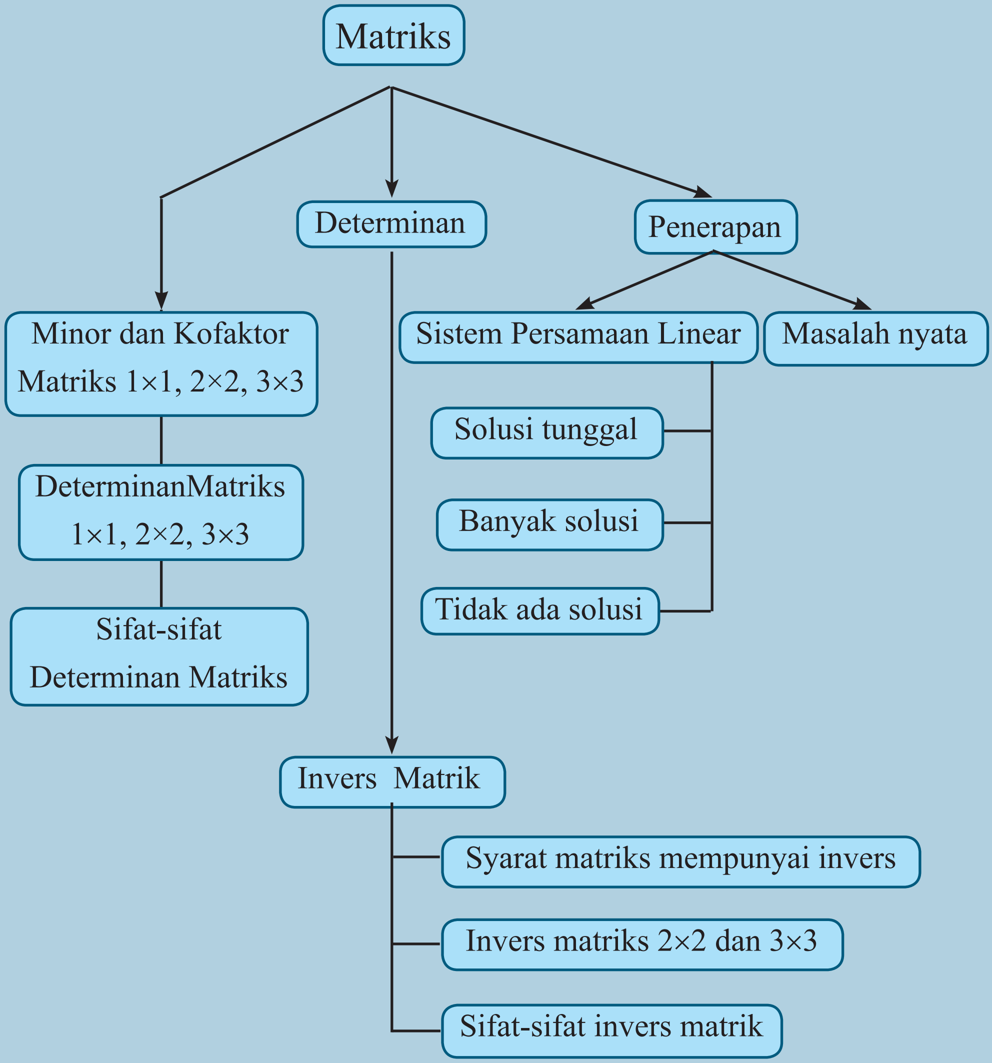
Meskipun aturan itu menggunakan namanya, tetapi berbagai gagasan telah dirumuskan sebelumnya oleh banyak ahli matematika. Namun demikian, catatan penting Cramerlah yang membantu memperjelas dan mempopulerkan teknik ini.

Kematiannya pada usia 48 tahun disebabkan kerja terlalu keras dan kecelakaan akibat terjatuh dari kereta. Cramer adalah orang yang baik dan menyenangkan dan mempunyai minat yang luas. Ia menulis mengenai filsafat hukum dan pemerintahan serta sejarah matematika. Ia bekerja pada kantor pemerintahan dan berpartisipasi di angkatan bersenjata di bagian artileri dan kegiatan pembentengan pemerintah. Ia juga menjadi instruktur bagi para pekerja mengenai teknik perbaikan katedral dan melakukan penggalian peninggalan katedral. Cramer menerima banyak gelar kehormatan untuk kegiatan-kegiatan yang dilakukannya.

(*sumber: Anton, H. Dan Rorres, C. 2004. Aljabar Linear Elementer, Versi Aplikasi, terjemahan. Jakarta: Erlangga*).
www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cramer.html

Hikmah yang mungkin bisa kita petik adalah:
Hasil baik yang didapat dikemudian hari merupakan buah dari kerja keras.

Peta Konsep


Matriks
Determinan
Penerapan
Minor dan Kofaktor Matriks 1×1, 2×2, 3×3
DeterminanMatriks 1×1, 2×2, 3×3
Sifat-sifat Determinan Matriks
Sistem Persamaan Linear
Masalah nyata
Solusi tunggal
Banyak solusi
Tidak ada solusi
Invers Matrik
Syarat matriks mempunyai invers
Invers matriks 2×2 dan 3×3
Sifat-sifat invers matrik

Ingat Kembali

Konsep matriks telah Anda pelajari di kelas X. Matriks didefinisikan sebagai susunan bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu susunan berbentuk persegipanjang. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa "( )" atau kurung siku "[ ]". Untuk menamakan matriks, disepakati menggunakan huruf kapital.

Ordo atau ukuran matriks menyatakan banyaknya baris dan kolom suatu matriks dan dinotasikan dengan $m \times n$ (m baris dan n kolom).

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A memiliki dua baris dan dua kolom, ditulis $A_{2\times 2}$. Matriks B memiliki dua baris dan tiga kolom, ditulis $B_{2\times 3}$.

Unsur atau elemen matriks pada baris ke-i kolom ke-j dinotasikan $\boldsymbol{a_{ij}}$. Pada matriks A di atas, elemen baris ke-1 kolom ke-1 (a_{11}) adalah 2, elemen baris ke-1 kolom ke-2 (a_{12}) adalah 1, elemen baris ke-2 kolom ke-1 (a_{21}) adalah a, dan elemen baris ke-2 kolom ke-2 (a_{22}) adalah b.

Pada pembahasan ini, Anda akan mempelajari pengertian determinan matriks 1×1, 2×2, dan 3×3 serta sifat-sifat determinan. Determinan matriks merepresentasikan suatu bilangan tunggal. Determinan diperoleh dengan mengalikan dan menjumlahkan elemen-elemen matriks dengan cara yang khusus. Pembahasan tentang determinan merupakan dasar untuk menentukan invers suatu matriks dan dalam masalah sistem persamaan linear.

Subbab 1.1 Determinan Matriks 1×1

Definisi

Definisi : Diberikan matriks $A = [a]$. Determinan matriks A, dinotasikan det(A) adalah a.

Catatan : notasi lain untuk determinan matriks A adalah |A| atau $|\,a\,|$, dengan $|A| = |a|$.

Contoh 1.1

Diberikan matriks $B = \left[2\right]$ dan $C = \left[-3\right]$. Tentukan determinan dari matriks B dan C

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan definisi determinan matriks 1×1, det(B) = 2 dan det(C) = –3

Hati-hati, untuk matriks 1×1 jangan bingung dengan notasi "| |" pada determinan dan notasi nilai mutlak.

Subbab 1.2 Menentukan Determinan Matriks 2×2 dan Sifat-sifatnya Menggunakan Kofaktor.

Kegiatan 1.2.1 Minor, Kofaktor dan Determinan Matriks 2×2

Determinan matriks hanya dimiliki oleh matriks persegi. Determinan matriks dapat digunakan untuk menentukan invers matriks atau menyelesaikan sistem persamaan linear. Pada subbab ini akan mempelajari determinan matriks 2×2 yang didasarkan pada ekspansi kofaktor. Untuk menentukan kofaktor Anda harus mempelajari minor suatu matriks terlebih dahulu.

Ayo Mengamati

Contoh 1.2

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Dari matriks A diperoleh:

$M_{11} = \left|2\right| = 2$ $\quad\quad$ $C_{11} = \left(-1\right)^{1+1} \cdot 2 = 2$

$M_{12} = \left|-1\right| = -1$ $\quad\quad$ $C_{12} = \left(-1\right)^{1+2} \cdot \left(-1\right) = 1$

$M_{21} = |5| = 5$ $\qquad$ $C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 5 = -5$

$M_{22} = |-3| = -3$ $\qquad$ $C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-3) = -3$

M_{11} disebut minor entri a_{11} dan C_{11} disebut kofaktor entri a_{11}

M_{12} disebut minor entri a_{12} dan C_{12} disebut kofaktor entri a_{12}

M_{21} disebut minor entri a_{21} dan C_{21} disebut kofaktor entri a_{21}

M_{22} disebut minor entri a_{22} dan C_{22} disebut kofaktor entri a_{22}

Hubungan antara minor tiap entri matriks A dan matriks A disajikan dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Hubungan antara minor tiap entri matriks A dan matriks A

Entry	Minor	Hubungan dengan Matriks A	Keterangan
$a_{11} = -3$	$M_{11} = \|2\| = 2$	$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	Baris pertama dihapus Kolom pertama dihapus
$a_{12} = 5$	$M_{12} = \|-1\| = -1$	$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	Baris pertama dihapus Kolom kedua dihapus
$a_{21} = -1$	$M_{21} = \|5\| = 5$	$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	Baris kedua dihapus Kolom pertama dihapus
$a_{22} = 2$	$M_{22} = \|-3\| = -3$	$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$	Baris kedua dihapus Kolom pertama dihapus

Dari Tabel 1, M_{11} adalah determinan submatriks setelah baris ke-1 dan kolom ke-1 dihapus. M_{12} adalah determinan submatriks setelah baris ke-1 dan kolom ke-2 dihapus. M_{21} adalah determinan submatriks setelah baris ke-2 dan kolom ke-1 dihapus. M_{22} adalah determinan submatriks setelah baris ke-2 dan kolom ke-2 dihapus.

Contoh 1.3

Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Tentukan semua minor dan matriks kofaktor matriks B.

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan definisi, minor dan kofaktor matriks B disajikan dalam tabel berikut.

Minor	Kofaktor
$M_{11} = \lvert 4 \rvert = 4$	$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$
$M_{12} = \lvert 1 \rvert = 1$	$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$
$M_{21} = \lvert 3 \rvert = 3$	$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$
$M_{22} = \lvert 2 \rvert = 2$	$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$

Minor matriks $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan matriks kofaktor dari matriks $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Contoh 1.4

Diberikan matriks $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan semua minor dan kofaktor masing-masing entri matriks C.

Alternatif Penyelesaian

Minor	Kofaktor
$M_{11} = \|0\| = 0$	$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 0 = 0$
$M_{12} = \|2\| = 2$	$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$
$M_{21} = \|3\| = 3$	$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$
$M_{22} = \|2\| = 2$	$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$

Minor matriks C adalah $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan kofaktor matriks C adalah $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Berdasarkan Contoh 1.2, Contoh 1.3, dan Contoh 1.4 buatlah definisi tentang minor dan kofaktor dari suatu entri matriks 2×2. Tulislah definisi yang Anda buat pada tempat berikut ini.

Kegiatan 1.2.2 Determinan Matriks 2×2.

Determinan matriks 2×2 didefinisikan sebagai berikut.

Definisi

Definisi Determinan.

Diberikan Matriks *A* ordo 2×2. Determinan matriks *A* didefinisikan sebagai:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12}$$

Dengan a_{11}, a_{12} berturut-turut entri baris ke-1 kolom ke-1 dan entri baris ke-1 kolom ke-2 pada matriks *A*. C_{11} dan C_{12} berturut-turut kofaktor entri a_{11} dan a_{12}

Contoh 1.5

Matriks $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ pada Contoh 1.3 memiliki kofaktor $\begin{bmatrix}4 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$.

Berdasarkan definisi determinan matriks diperoleh $\det(B)=2\cdot 4+3\cdot(-1)=5$

Ayo Menanya

Dari beberapa contoh di atas, mungkin ada pertanyaan-pertanyaan yang ingin Anda sampaikan. Pertanyaan berikut mungkin juga Anda tanyakan adalah: "Apakah ada cara lain untuk menentukan determinan matriks 2×2?",
Tulis pertanyaan Anda pada tempat berikut.

Ayo Menalar

Contoh 1.6

Diberikan matriks $D=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$. Minor matriks D adalah $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ dan matriks kofaktor dari matriks D adalah $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$. Berdasarkan definisi determinan matriks diperoleh $\det(D)=2\cdot 1+2\cdot 1=4$.

Perlu Anda ketahui, definisi determinan matriks $A_{2\times 2}$ adalah $\det(A)=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}$, dengan $a_{11}, a_{12}, C_{11}, C_{12}$ berturut-turut entri baris ke-1 kolom ke-1, entri baris ke-1 kolom ke-2, kofaktor entri a_{11} dan kofaktor entri pada matriks A. $a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}$ disebut ekspansi kofaktor baris pertama pada matriks A.

Determinan matrik secara umum dapat dicari dengan ekspansi kofaktor baris ke-i atau kolom ke-j pada matriks tersebut.

Coba Anda tentukan ekspansi baris pertama, kedua, kolom pertama dan kolom kedua matriks D.

Tulis hasil yang Anda dapatkan pada tempat berikut:

Ekspansi Kofaktor	Determinan Matriks D
Baris pertama	$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$
Baris kedua	$a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} =(-2)\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 4$
Kolom pertama	$a_{11}C_{21} + a_{21}C_{21} = 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) = 4$
Kolom kedua	$a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$

Tantangan

Anda telah mempelajari bagaimana menentukan determinan matriks 2×2 melalui ekpansi kofaktor. Sekarang coba Anda membuat rumus sederhana untuk menentukan determinan matriks 2×2 jika diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan menggunakan definisi determinan matriks 2×2. Tuliskan pekerjaan Anda pada tempat berikut.

Kegiatan 1.2.3 Sifat-sifat Determinan Matriks 2×2

Anda telah mempelajari determinan matriks 2×2 dengan ekspansi kofaktor. Selanjutnya Anda akan mempelajari sifat-sifat determinan matriks 2×2.

Ayo Mengamati

Contoh 1.7

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$\det(A) = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -5$ dan $\det(B) = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = 7$

Jika kedua matriks tersebut dikalikan maka

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+6 & -2+3 \\ 6+2 & -4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$\det(AB) = 9 \cdot (-3) - 1 \cdot 8 = -35$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-4 & 9-2 \\ 2+2 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$\det(BA) = (-1) \cdot 7 - 7 \cdot 4 = -35$

Contoh 1.8

Diberikan matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $D = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(C) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = 8$ dan $\det(D) = 0 \cdot (-1) - 9 \cdot (-2) = 18$

Sehingga $\det(C) \cdot \det(D) = 8 \cdot 18 = 144$

Jika kedua matriks tersebut dikalikan, maka

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-4 & 9-2 \\ 0-4 & -27-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -4 & -29 \end{bmatrix}$$

$\det(CD) = (-4)\cdot(-29) - 7\cdot(-4) = 144$

$$DC = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-27 & 0+18 \\ -2+3 & -4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & 18 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$\det(DC) = (-27)\cdot(-6) - 18\cdot 1 = 144$

Contoh 1.9

Diketahui matriks $E = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$. Transpose dari matriks E adalah $E^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

$\det(E) = 2\cdot 7 - 3\cdot 1 = 11$ dan $\det(E^T) = 2\cdot 7 - 1\cdot 3 = 11$

Contoh 1.10

Diketahui matriks $F = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Transpose dari matriks F adalah $F^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(F) = 1\cdot 0 - 8\cdot(-2) = 16$ dan $\det(F^T) = 1\cdot 9 - (-2)\cdot 8 = 16$

Contoh 1.11

Diketahui matriks $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$. Pada matriks-matriks tersebut berlaku hubungan $GH = I$

$\det(G) = 1\cdot 2 - 2\cdot 5 = -8$ dan $\det(H) = (-1)\cdot 2 - 1\cdot 1 = -3$

serta $\det(I) = 1\cdot 9 - 5\cdot(-3) = 24$

$$\det(G) = -8 = \frac{24}{-3} = \frac{\det(I)}{\det(H)} \qquad \det(H) = -3 = \frac{24}{-8} = \frac{\det(I)}{\det(G)}$$

Contoh 1.12

Diketahui matriks $J = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ dan $K = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$$3J = 3\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$$

$$|3J| = 6\cdot 24 - 12\cdot 18 = 9(2\cdot 8 - 4\cdot 6) = 3^2\,|J|$$

$$2K = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & 14 \end{bmatrix} = 2\cdot 14 - 6\cdot 10 = 4\left(1\cdot 7 - 3\cdot 5\right) = 2^2\,|K|$$

Contoh 1.13

Jika semua unsur pada suatu baris atau kolom matriks $L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dikalikan skalar k, apa yang dapat disimpulkan?

Alternatif Penyelesaian

Untuk membuat kesimpulan secara umum, perlu ditinjau beberapa kasus. Kasus pertama, masing-masing entri baris pertama dikalikan skalar k kemudian dicari determinannya. Kasus kedua, masing-masing entri baris kedua dikalikan skalar k kemudian dicari determinannya. Kasus ketiga, masing-masing entri kolom pertama dikalikan skalar k kemudian dicari determinannya. Kemudian Kasus keempat, masing-masing entri kolom kedua dikalikan skalar k kemudian dicari determinannya. Dari keempat kasus tersebut, buatlah kesimpulan.

Sekarang, carilah determinan dari masing-masing kasus di atas dan buatlah kesimpulan pada tempat berikut.

Ayo Menanya

Setelah Anda mengamati dengan cermat Contoh 1.7 sampai Contoh 1.13, mungkin Anda mempunyai beberapa pertanyaan. Mungkin salah satu pertanyaan Anda adalah sebagai berikut:

1. Apakah pada matriks berordo 2×2 selalu berlaku $\det(A)\cdot\det(B)=\det(AB)$
2. Apakah pada matriks berordo 2×2 selalu berlaku $\det(A)=\det(A^T)$
3. Jika $AB = C$, dengan A, B dan C adalah matriks berordo 2×2, apakah A, B

   $\det(A)=\dfrac{\det(C)}{\det(B)}$ berlaku secara umum? dan apakah $\det(B)=\dfrac{\det(C)}{\det(A)}$ juga berlaku secara umum?

Nah, tuliskan pertanyaan-pertanyaan Anda pada tempat berikut:

Ayo Menalar

Untuk menjawab beberapa pertanyaan tentang sifat determinan matriks, buat beberapa matriks dalam bentuk umum, misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

Selidiki apakah $\det(A)\cdot\det(B) = \det(AB)$ berlaku secara umum?

Petunjuk: untuk menyeleidiki apakah berlaku $\det(A)\cdot\det(B) = \det(AB)$, tentukan $\det(A)$, $\det(B)$ dan tentukan matriks AB, kemudian carilah $\det(AB)$ Tulis hasilnya pada tempat berikut.

Menyelidiki apakah $\det(A) = \det(A^T)$ berlaku secara umum?

Petunjuk: untuk menyeleidiki apakah berlaku $\det(A) = \det(A^T)$, tentukan $\det(A)$, A^T, dan $\det(A^T)$ Tulis hasilnya pada tempat berikut.

Selidiki apakah Jika $AB = C$, dengan A, B, dan C adalah matriks berordo 2×2 dengan $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$, maka berlaku $\det(A) = \dfrac{\det(C)}{\det(B)}$ atau $\det(B) = \dfrac{\det(C)}{\det(A)}$?

Petunjuk: kalikan matriks A dan B sehingga menghasilkan matriks C. Hitung $\det(C)$, $\det(B)$ dan $\det(A)$. Tulis hasilnya pada tempat berikut.

Contoh 1.14

Buatlah sebarang dua matriks A dan B dengan ordo 2x2. Kemudian tentukanlah:

a. $A + B$

b. $A - B$

c. $\det(A)$ dan $\det(B)$

d. $\det(A + B)$ dan $\det(A - B)$

ulangi perintah (a) sampai (d) dengan sebarang dua matriks ordo 2×2 yang lain.

Buatlah kesimpulan dari kegiatan yang telah Anda lakukan kemudian tulislah kesimpulan tersebut pada tempat berikut.

Ayo Mengomunikasikan

Anda telah membuat kesimpulan tentang sifat-sifat determinan matriks berordo 2×2. Tulislah kesimpulan yang Anda buat pada selembar kertas. Kemudian tukarkan kesimpulan Anda dengan teman yang lain. Cermati kesimpulan teman Anda, kritisi, dan tanyakan jika ada hal yang kurang mengerti. Secara santun, berikan saran perbaikan jika dianggap perlu.

Subbab 1.3. Determinan Matriks 3×3 dan Sifat-Sifatnya

Ayo Mengamati

Pada pembahasan sebelumnya Anda telah mempelajari determinan matriks berordo 2×2 beserta sifat-sifat determinannya. Selanjutnya, Anda akan mempelajari determinan matriks berordo 3×3. Sebelum mempelajari cara menentukan determinan matriks ordo 3×3, Anda harus mempelajari tentang pengertian minor dan kofaktor pada matriks 3×3.

Contoh 1.15

Diberikan matriks $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$. Tentukan minor dan kofaktor matriks M.

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan minor dan kofaktor masing-masing entri matriks M serupa dengan menentukan minor dan kofaktor matrik ordo 2×2. Minor dari a_{11}, disimbolkan M_{11} adalah determinan submatriks setelah baris pertama dan kolom pertama dihapus. Berikut disajikan minor masing-masing entri matriks M.

Entry	Matriks M	Minor	Keterangan
M_{11}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 46$	Baris pertama dihapus Kolom pertama dihapus
M_{12}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$	Baris pertama dihapus Kolom kedua dihapus

Entry	Matriks M	Minor	Keterangan
M_{13}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -8$	Baris pertama dihapus Kolom kedua dihapus
M_{21}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 13$	Baris kedua dihapus Kolom pertama dihapus
M_{22}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$	Baris kedua dihapus Kolom kedua dihapus
M_{23}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$	Baris kedua dihapus Kolom ketiga dihapus
M_{31}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 1$	Baris ketiga dihapus Kolom pertama dihapus
M_{32}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -12$	Baris ketiga dihapus Kolom kedua dihapus
M_{33}	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -23$	Baris ketiga dihapus Kolom ketiga dihapus

Sehingga minor matriks M adalah $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 48 & -8 \\ 13 & -6 & 1 \\ 1 & -12 & -23 \end{bmatrix}$

$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot 46 = 46$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot 48 = -48$

$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot (-8) = -8$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot 13 = -13$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \cdot (-6) = -6$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot 1 = -1$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 \cdot 1 = 1$

$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \cdot (-12) = 12$

$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 \cdot (-23) = -23$

Sehingga kofaktor matriks M adalah $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & -48 & -8 \\ -13 & -6 & -1 \\ 1 & 12 & -23 \end{bmatrix}$

Contoh 1.16

Tentukan minor dan kofaktor matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \end{bmatrix}$.

Alternatif Penyelesaian

$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -12$ $\quad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -4$ $\quad M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 8$ $\quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -7$ $\quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1$ $\quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 10$ $\quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7$

Sehingga minor matriks A adalah $\begin{bmatrix} -12 & 8 & 1 \\ -4 & -7 & 10 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

dan kofaktornya $\begin{bmatrix} -12 & -8 & 1 \\ 4 & -7 & -10 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

Contoh 1.17

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ pada Contoh 1.16 memiliki kofaktor $\begin{bmatrix} -12 & -8 & 1 \\ 4 & -7 & -10 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$. Tentukan ekpansi kofaktor baris pertama, kedua, dan ketiga serta ekspansi kofaktor kolom pertama, kedua dan ketiga pada matriks *A*.

Alternatif Penyelesaian

Ekspansi kofaktor baris ke-i matriks 3×3 didefinisikan sebagai $a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3}$ dengan a_{ij} adalah entri baris ke-i kolom ke-j dan C_{ij} kofaktor baris ke-*i* kolom ke-*j*.

Ekspansi kofaktor baris ke-1 pada matriks A $= 1\cdot(-12) + 2\cdot(-8) + (-1)\cdot 1 = -29$

Ekspansi kofaktor baris ke-2 pada matriks A $= (-2)\cdot 4 + 3\cdot(-7) + 0\cdot(-10) = -29$

Ekspansi kofaktor baris ke-3 pada matriks A $= (-3)\cdot 3 + 4\cdot 2 + (-4)\cdot 7 = -29$

Ekspansi kofaktor kolom ke-j matriks 3×3 didefinisikan sebagai $a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j}$.

Ekspansi kofaktor kolom ke-1 pada matriks $A = 1\cdot(-12) + (-2)\cdot 4 + (-3)\cdot 3 = -29$

Ekspansi kofaktor kolom ke-2 pada matriks $A = 2\cdot(-8) + 3\cdot(-7) + 4\cdot 2 = -29$

Ekspansi kofaktor kolom ke-3 pada matriks $A = (-1)\cdot 1 + 0\cdot(-10) + (-4)\cdot 7 = -29$

Jika diamati ekpansi kofaktor baris ke-i atau kolom ke-j pada contoh 1.17 menghasilkan nilai yang sama, yaitu –29. Nilai inilah yang disebut dengan determinan matriks A.

Contoh 1.18

Tunjukkan bahwa determinan matrik $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah 11.

Alternatif Penyelesaian

Minor untuk masing-masing entri matriks R adalah $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ dengan matriks kofaktornya $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Ekspansi kofaktor baris pertama = $1\cdot 5 + (-1)\cdot(-6) + 0\cdot 2 = 5 + 6 = 11$

Jadi benar bahwa determinan matriks R adalah 11.

Coba Anda selidiki ekspansi kofaktor baris kedua, baris ketiga, kolom pertama, kolom kedua, dan kolom ketiga.

Contoh 1.19

Matriks $N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & p & 1 \\ p & 0 & 4 \end{bmatrix}$ mempunyai determinan 9. Tentukan nilai terkecil p+9.

Alternatif Penyelesaian

Akan dicari C_{11}, C_{12}, dan C_{13}.

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} p & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4p - 0) = 4p$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (0 - p) = p$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 - p^2) = -p^2$$

Oleh karena $\det(N) = 9$, maka

$$\begin{aligned} \det(N) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ 9 &= 2 \cdot 4p + 3 \cdot p + 2 \cdot (-p^2) \\ 0 &= -2p^2 + 11p - 9 \\ 0 &= 2p^2 - 11p + 9 \\ 0 &= (2p - 9)(p - 1) \end{aligned}$$

Sehingga $p = 1$ atau $p = \frac{9}{2}$.

Jadi nilai terkecil $p + 9$ adalah $1 + 9 = 10$

Setelah mengamati Contoh 1.17, 1.18, dan 1.19, silahkan Anda definisikan determinan matriks 3×3

Definisi

Definisi Determinan Matriks 3×3.

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ memiliki kofaktor $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$,

determinan matriks *A* didefinisikan sebagai $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$

Contoh 1.20

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ dengan kofaktor matriks A

$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$ Berdasarkan definisi, determinan matriks A adalah

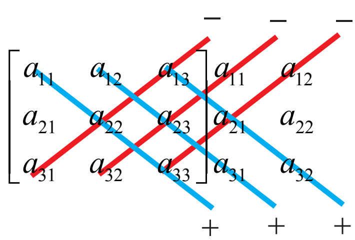
$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}.$$

jika diuraikan menghasilkan

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
\end{aligned}$$

Jadi $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Untuk memudahkan menghafal $\det(A)$ digunakan cara kaidah Sarrus berikut:



Sebagai contoh, Tentukan determinan matriks $N = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan determinan matriks N, digunakan *kaidah Sarrus*.

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad - \quad - \quad - \\ \left[\begin{array}{ccc} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{cc} -3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \\ \qquad\qquad + \quad + \quad + \end{array}$$

$$\det(N) = (-3)\cdot 1\cdot(-1) + 4\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 2 - 0\cdot 3\cdot(-3) - (-1)\cdot 2\cdot 4 = 21$$

Contoh 1.21

Diberikan Matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Jika C^T adalah transpose matriks C, selidiki apakah $\det(C) = \det(C^T)$?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ sehingga $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan Kaidah Sarrus diperoleh

$$\det(C) = 1\cdot 8\cdot(-1) + 2\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 3\cdot 0 - 1\cdot 8\cdot(-1) - 0\cdot 2\cdot 1 - (-1)\cdot 3\cdot 2 = 10$$

$$\det(C^T) = 1\cdot 8\cdot(-1) + 3\cdot 0\cdot(-1) + 1\cdot 2\cdot 2 - (-1)\cdot 8\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 3 = 10$$

Jadi $\det(C) = \det(C^T)$

Contoh 1.22

Diberikan matriks $K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Apakah $\det(KL) = \det(K) \cdot \det(L)$?

Alternatif Penyelesaian

$KL = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 & 6 \\ 10 & 6 & 6 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan kaidah Sarrus diperoleh:

$\det(KL) = (-2) \cdot 6 \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot 5 + 6 \cdot 10 \cdot 7 - 5 \cdot 6 \cdot 6 - 7 \cdot 6 \cdot (-2) - 6 \cdot 10 \cdot 10 = -48$

$\det(K) = 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 = -3$

$\det(\mathrm{L}) = 21 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) \cdot 3 = 16$

Jadi $\det(K) \cdot \det(L) = (-3) \cdot 16 = -48 = \det(KL)$

Contoh 1.23

Diberikan matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan $\det(3P)$ dan selidiki hubungannya dengan $\det(P)$

Alternatif Penyelesaian

$3P = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -3 & -6 & 3 \\ 9 & 15 & 6 \end{bmatrix}$, dengan menggunakan kaidah *Sarrus* diperoleh

$$\det(3P) = 3\cdot(-6)\cdot 6 + 6\cdot 3\cdot 9 + 3\cdot(-3)\cdot 15 - 9\cdot(-6)\cdot 3 - 15\cdot 3\cdot 3 - 6\cdot(-3)\cdot 6 = 54$$

$$\det(P) = 1\cdot(-2)\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot(-1)\cdot 5 - 3\cdot(-2)\cdot 1 - 5\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 2 = 2$$

Hubungan $\det(3P)$ dengan $\det(P)$ adalah $\det(3P) = 27.\det(P) = 3^3 \det(P)$

Ayo Menanya

Setelah mempelajari beberapa contoh di atas, tentu ada beberapa pertanyaan yang ingin Anda kemukakan. Mungkin pertanyaan-pertanyaan tersebut antara lain:

a. Apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(A) = \det(A^T)$?

b. Apakah $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$ selalu berlaku dalam matriks 3×3?

c. Apakah $\det(kA) = k^3 \det(A)$ selalu berlaku dalam matriks 3×3?

d. Apakah $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ selalu berlaku dalam matriks 3×3?

e. Apakah $\det(A-B) = \det(A) - \det(B)$ selalu berlaku dalam matriks 3×3?

Mungkin Anda memiliki pertanyaan lain yang ingin dikemukakan. Silahkan tulis pertanyaan tersebut pada tempat berikut.

Ayo Menggali Informasi

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -7 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ adalah contoh matriks yang tidak memenuhi hubungan $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$, mengapa? Coba Anda cari det(A), det(B), dan det(A + B).

Matrik $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ dan $J=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ adalah contoh matriks yang memenuhi hubungan $\det(I+J)=\det(I)+\det(J)$, mengapa?

Oleh karena dapat ditunjukkan contoh penyangkal yang mengakibatkan $\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$, disimpulkan bahwa pada matriks 3×3 tidak selalu berlaku $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$. Masih banyak contoh penyangkal lain yang menyebabkan $\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$, dapatkah Anda mencarinya?

Hubungan $\det(A-B)=\det(A)-\det(B)$ juga tidak selalu berlaku pada matriks 3×3. Sebagai contoh penyangkal matriks $A=\begin{bmatrix}1 & 9 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ -5 & -3 & 2\end{bmatrix}$ dan

$B=\begin{bmatrix}2 & 7 & 2\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ berturut-turut memiliki $\det(A)=42$ dan $\det(B)=9$.

$A-B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 4 & -3\\ -6 & -2 & 1\end{bmatrix}$ sehingga $\det(A-B)=38$

Dengan demikian $\det(A-B)\neq\det(A)-\det(B)$. Oleh karena dapat ditunjukkan contoh penyangkal, maka disimpulkan pada matriks 3×3 tidak selalu berlaku $\det(A-B)=\det(A)-\det(B)$. Masih banyak contoh penyangkal lain yang menyebabkan $\det(A-B)\neq\det(A)-\det(B)$, dapatkah Anda mencarinya?

Ayo Menalar

Selidiki Apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(A) = \det(A^T)$?

Coba Anda selidiki apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(A) = \det(A^T)$.

Petunjuk: (1). Ambil sebarang matriks A, misal matrik $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$.

(2). Tentukan Transpose matriks A

(3). Tentukan det(A)

(4). Tentukan det(A^T)

(5). Bandingkan langkah (3) dan (4)

Tulis hasil pekerjaan Anda pada tempat berikut.

Selidiki Apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(kA) = k^3 \det(A)$?

Coba Anda selidiki apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(kA) = k \det(A)$.

Petunjuk: (1). Ambil sebarang matriks A, misal matrik $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$.

(2). Ambil sebarang skalar k, dengan $k \in R$.

(3). Tentukan $\det(kA)$.

(4). Tentukan $\det(A)$.

(5). Bandingkan hasil pada (3) dan (4), kemudian buatlah Kesimpulan.

Tulis hasil pekerjaan Anda pada tempat berikut.

Selidiki Apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(AB) = \det(A).\det(B)$?
Coba Anda selidiki apakah dalam matriks 3×3 selalu berlaku $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

Petunjuk: (1). Ambil sebarang matriks *A, B* , misal $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix}$.

(2). Kalikan matriks *A* dan *B* kemudian tentukan $\det(AB)$

(3). Tentukan $\det(A)$ dan $\det(B)$, kemudian hitung $\det(A) \cdot \det(B)$

(4). Bandingkan hasil pada (2) dan (3), kemudian buatlah kesimpulan.

Tulis hasil pekerjaan Anda pada tempat berikut.

Ayo Mengomunikasikan

Setelah mempelajari uraian di atas, buatlah kesimpulan tentang sifat-sifat determinan matriks 3×3. Secara santun, mintalah ijin kepada Guru untuk mempresentasikan kesimpulan yang Anda buat.

Latihan 1.3

1. Hitunglah determinan matriks berikut.

   a. $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

   b. $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. Buatlah matrik ordo 2×2 yang mempunyai determinan 8.

3. Tentukan semua nilai p sehingga $\det(A) = 0$.

   a. $A = \begin{bmatrix} -5 & p+4 \\ p-2 & 1 \end{bmatrix}$

   b. $A = \begin{bmatrix} p-2 & 4 & 0 \\ 2 & p & 0 \\ 0 & 0 & p-3 \end{bmatrix}$

4. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, |\mathrm{B}| = -2$, dan $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & p \end{bmatrix}$. Jika $AB = C$ tentukanlah nilai dari $p^2 - 2p + 1$.

5. Matriks A adalah matriks 2×2. Matriks B adalah matriks yang diperoleh dengan menukarkan baris pertama dengan baris kedua pada matriks A. Apa hubungan antara $\det(A)$ dan $\det(B)$? Jelaskan.

6. Carilah semua x yang memenuhi $\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & x & -3 \\ 1 & 3 & x-2 \end{vmatrix}$.

7. Apa yang dapat Anda katakan mengenai determinan matriks 2 × 2 dan 3 × 3 yang semua elemenya adalah bilangan 1? Jelaskan alasan Anda.

8. Mengapa determinan dari matriks 3 × 3 dengan salah satu baris yang semua elemennya nol adalah nol? Beri penjelasan.

9. Apa yang dapat Anda simpulkan mengenai determinan matriks 2 × 2 dan 3 × 3 yang mempunyai dua baris dengan elemen yang sama.

10. Tunjukkan bahwa $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ (Howard Anton)

Pengayaan.

1. Diberikan matriks A dan B masing-masing berordo 2 × 2, tunjukkan bahwa det(AB) = det(BA).

2. Apakah matriks persegi berordo 3 × 3 yang memiliki determinan 0 selalu memuat suatu baris yang semua elemennya 0? Beri penjelasan.

Subbab 1.4 Invers Matriks

Pesan Bersandi

Dapatkah anda membaca pesan rahasia ini:

5 0 –6 8 –11 3 0 7 8 7 7 13

Mungkin anda berpikir ini hanya sebuah kumpulan bilangan. Bagaimana jika anda diberi tahu kode sandi dari pesan tersebut, yakni:

-	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-6	7	-7
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z			
8	-8	9	-9	10	-10	11	-11	12	-12	13	-13			

Anda akan dengan mudah membaca pesannya, yakni:

5	0	–6	8	–11	3	0	7	8	7	7	13
I	-	L	O	V	E	-	M	O	M	M	Y

Jadi, jika kode sandi tersebut bocor ke orang yang tidak berhak, pesan akan mudah dibaca. Mungkin anda akan berpikir tentang bagaimana cara meningkatkan pengamanan pesan rahasia agar lebih sulit diketahui orang yang tidak berhak?

Konsep matriks yang sudah anda pelajari sebelumnya dapat diterapkan untuk menambah pengamanan. Hal yang dapat dilakukan adalah menyatakan pesan tersebut dalam bentuk matriks, misalnya menjadi matriks berordo 6×2:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \\ -6 & 8 \\ 8 & 7 \\ -11 & 7 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya matriks tersebut dikalikan dengan matriks persegi berordo 2×2 sebagai ***kode sandi tambahan***, sehingga hasil perkalian matriksnya menjadi:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \\ -6 & 8 \\ 8 & 7 \\ -11 & 7 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 21 & 14 \\ -6 & -2 \\ 61 & 38 \\ -34 & -19 \\ 54 & 35 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, pesan yang dikirim menjadi

25 21 –6 61 -34 54 15 14 -2 38 -19 35

sehingga meski ada yang mengetahui kode sandi pertama, orang tersebut belum dapat membaca pesan tersebut.

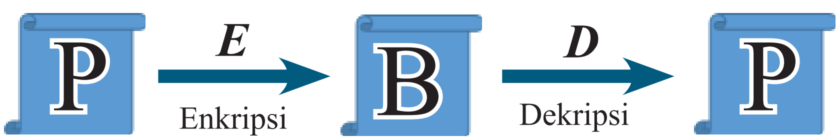
Pengirim pesan cukup memberitahukan matriks $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ yang digunakannya untuk mengamankan pesan kepada orang yang dituju. Dengan menggunakan matriks kode sandinya, penerima pesan akan mendapatkan ***matriks baru***, yakni $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, yang selanjutnya dapat digunakan untuk membuka pesannya.

Pesan yang diterima diproses seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 21 & 14 \\ -6 & -2 \\ 61 & 38 \\ -34 & -19 \\ 54 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \\ -6 & 8 \\ 8 & 7 \\ -11 & 7 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, pesan aslinya dapat diketahui, yaitu 5 0 -6 8 -11 3 0 7 8 7 7 13. Selanjutnya, dengan menggunakan table kode sandi, pesan dapat dibaca yaitu: I LOVE MOMMY.

Ilustrasi pengiriman pesan bersandi



Misalkan

P : pesan awal yang sudah dirubah dalam bentuk matriks

E : matriks enskripsi yang digunakan untuk mengamankan pesan

B : pesan baru yang sudah diamankan setelah di kalikan matriks bersandi

D : matriks dekripsi yang digunakan untuk membuka matriks menjadi matriks awal .

Sehingga dapat dituliskan dalam bentuk persamaan:

$$PE = B$$
$$BD = P$$

Setelah pesan dirubah dalam bilangan dengan menggunakan kode sandi awal dan dituliskan dalam bentuk matriks (P), anda bisa menambahkan pengamanan lebih lanjut menggunakan kode sandi tambahan dengan format matriks. Pertanyaan yang menarik adalah matriks E seperti apa yang dapat digunakan sebagai alat untuk mengamankan pesan? Bagaimana cara mendapatkan ***matriks baru*** (D) yang digunakan untuk membuka pesan yang diterima (B) jika diberikan matriks E pengamannya?

Keterangan: matriks E adalah ***matriks yang memiliki invers*** dan matriks E adalah ***invers matriks*** dari matriks D.

Kegiatan 1.4.1 Mengekplorasi Invers Matriks

Ayo Mengamati

Amati fakta-fakta hasil perkalian bilangan berikut:

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

Masih ingatkah anda tentang sifat-sifat operasi perkalian bilangan real? Bilangan 1 dalam kaitannya dengan sifat-sifat operasi perkalian bilangan real disebut unsur identitas (apa karakteristik dari unsur identitas dalam operasi perkalian? Dari fakta perkalian di atas, bisa kita katakan bahwa 2 adalah balikan/invers kali $\frac{1}{2}$ dan sebaliknya. Begitu juga $\frac{2}{3}$ adalah invers kali $\frac{3}{2}$

dan sebaliknya, Mengapa? Adakah bilangan real yang tidak memiliki invers terhadap operasi perkalian? Berikan alasannya.

Selanjutnya, amatilah fakta-fakta hasil perkalian matriks-matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & 11 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -57 & 5 & -46 \\ -11 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -57 & 5 & -46 \\ -11 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & 11 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya perhatikan istilah-istilah yang digunakan dalam kalimat-kalimat berikut:

a. Matriks $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ disebut ***invers matriks*** $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan *invers matriks* matriks A **ditulis** $\boldsymbol{A^{-1}}$

b. Matriks $\begin{bmatrix} -57 & 5 & -46 \\ -11 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ disebut *invers matriks* matriks $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & 11 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ dan *invers matriks* matriks B ditulis B^{-1}.

c. Seperti yang sudah dibahas di kelas XI, matriks $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

disebut *matriks identitas*, ditulis I. Apakah matriks identitas merupakan matriks persegi?

Berdasarkan fakta-fakta perkalian matriks-matriks serta istilah invers matriks, tuliskan hubungan antara matriks A, A^{-1} dan matriks identitas I?

Dengan menggunakan pengetahuan dalam menentukan determinan matriks yang sudah dibahas pada subbab sebelumnya, akan didapat nilai determinan tiap-tiap matriks tersebut sebagai berikut:

a. $\det\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = (5\cdot 2)-(3\cdot 3)=1$

$\det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = (2\cdot 5)-(-3\cdot -3)=1$

b. $\det\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -2 & 11 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} = -1$

$\det\begin{bmatrix} -57 & 5 & -46 \\ -11 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$

Amati serta lengkapi informasi yang belum lengkap pada tabel berikut ini:

Tabel 1. 1 informasi matriks terkait ukuran, determinannya dan keberadaan invers matriksnya

No	Matriks	Ukuran	Determinan	Keterangan
1	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$	2×3	Tidak memiliki nilai determinan	Tidak memiliki invers
2	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	...	-2	Memiliki invers
3	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	...	...	Tidak memiliki invers

Ayo Menanya

Berdasarkan hasil pengamatan yang sudah anda lakukan, coba anda buat minimal 3 pertanyaan lain tentang invers. Upayakan pertanyaan yang anda buat memuat kata-kata “matriks persegi”, “determinan matriks”, “bukan matriks persegi”, “matriks identitas”, “memiliki invers”, dan “invers matriks”.

Petunjuk: kalian bisa lebih fokus pada keterkaitan antara matriks-matriks yang memiliki inversnya dengan nilai determinan dari matriks tersebut, ukuran dari matriks-matriks yang memiliki invers serta hubungan antara matriks dengan invers matriksnya.

Ayo Menggali Informasi dan *Ayo Menalar*

Dari sekian banyak pertanyaan yang anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Apa semua matriks mempunyai invers matriks?
2. Bagaimana ciri-ciri matriks yang memiliki invers matriks?
3. Apa semua matriks persegi mempunyai invers matriks?
4. Apa hubungan matriks dengan invers matriksnya?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut perhatikan fakta-fakta matematika terkait matriks, operasi perkalian pada matriks, determinan matriks sebelumnya.

Untuk dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan yang anda buat, anda harus melakukan aktivitas menalar dengan melengkapi informasi yang diberikan. Untuk memperkaya informasi anda, perhatikan dan lengkapi informasi pada tabel berikut:

Tabel 1. 2

No	Matriks	Ukuran/ Ordo	Nilai Determinan	Keterangan
1	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	2×3	Tidak punya	Tidak memiliki invers
2	$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	...	...	Tidak memiliki invers
3	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	2×2	Tidak punya	Tidak memiliki invers
4	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	...	0	Tidak memiliki invers
5	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	...	...	Tidak memiliki invers
6	$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	...	...	Memiliki invers

Selanjutnya, perhatikan dan lengkapi informasi tentang hubungan antara matriks dan invers matriksnya pada tabel berikut:

Tabel 1. 3

No	Matriks A	Invers matriks (A^{-1})	AA^{-1}	$A^{-1}A$
1	$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	...	...
2	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	...	...
3	$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	...	...
4	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$	...	...

Berdasarkan tabel tersebut, buatlah kesimpulan terkait:

1. Ciri-ciri matriks yang memiliki invers?
2. Apa syarat untuk matriks persegi yang memiliki invers?
3. Jika matriks memiliki invers matriks, apa hubungan yang berlaku antara matriks dan invers matriksnya?

Selanjutnya, perhatikan pasangan-pasangan matriks dan invers matriksnya, kemudian jawablah pertanyaan yang menyertainya.

1. Matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ dan invers matriks $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Lengkapi informasi ini dengan menentukan:

a. $\det(A)$ dan $\det(A^{-1})$

b. $\dfrac{1}{\det(A)}$ dan $\dfrac{1}{\det(A^{-1})}$

c. $\det(A)\cdot\det(A^{-1})$

2. Matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan matriks $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Lengkapi informasi ini dengan menentukan :

a. $\det(A)$ dan $\det(A^{-1})$

b. $\dfrac{1}{\det(A)}$ dan $\dfrac{1}{\det(A^{-1})}$

c. $\det(A)\cdot\det(A^{-1})$

Sekarang, tuliskan kesimpulan awal atau dugaan awal tentang hubungan *determinan matriks* dan *determinan inversnya*

Kesimpulan tersebut digunakan untuk menyelesaiakan Contoh dan juga sebagai bahan untuk anda diskusikan dengan siswa/kelompok lainnya.

Contoh 1.24

Berdasarkan hasil bernalar anda, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini:

1. Apakah matriks-matriks berikut ini memiliki invers, berikan alasannya.

a. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

2. Tetapkan apakah pasangan-pasangan matriks berikut merupakan pasangan matriks dengan invers matriksnya! Berikan alasanya.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

b. $C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

c. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

d. $G = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$

3. Diberikan matriks $M = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ dan invers matriksnya $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} \\ -1 & a \end{bmatrix}$, tentukan nilai a.

4. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ x & -2 \end{bmatrix}$ memiliki invers matriks A^{-1} dan nilai $\det(A^{-1}) = 2$, tentukan nilai x.

Ayo Mengomunikasikan

Tuliskanlah kesimpulan yang anda dapatkan terkait ciri-ciri matriks yang memiliki invers dan sifat-sifat invers matriks.

Pertukarkan tulisan tersebut dengan teman sebangku/kelompok lainnya. Secara santun, silahkan saling berkomentar, menanggapi komentar, memberikan usul dan menyepakati ide-ide yang paling tepat.

Kegiatan 1.4.2 Menentukan Invers Matriks

Ayo Mengamati

Berdasarkan hasil aktivitas sebelumnya, Anda tentu sudah memperoleh temuan/kesimpulan tentang salah-satu karakteristik dari invers matriks, yakni:

Jika matriks A memiliki invers A^{-1}, maka akan berlaku $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Sedangkan pada subbab determinan yang Anda pelajari sebelumnya, Anda telah mengamati hubungan antara determinan hasil kali dua matriks dengan determinan masing-masing matriks. Jika A dan B adalah dua matriks persegi, maka

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

Berdasarkan sifat determinan hasil kali matriks tersebut tentu Anda bisa menggunakannya untuk mengamati hubungan determinan matriks yang memiliki invers dan determinan inversnya.

Karena $A \cdot A^{-1} = I$, maka berdasarkan sifat di atas akan didapatkan

$$\det(A) \times \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$$

Sehingga akan didapatkan hubungan antara determinan suatu matriks dengan determinan inversnya, yaitu

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Dengan mengamati hubungan kedua determinan di atas, Anda mungkin dapat mengamati syarat matriks A mempunyai invers berdasarkan nilai determinannya. Mungkinkah matriks A mempunyai invers jika determinannya bernilai nol?

Mungkin pertanyaan Anda selanjutnya adalah bagaimana cara menentukan invers dari suatu matriks A?

Dengan demikian, anda tentu akan mencari matriks yang memenuhi kriteria matriks invers, yakni jika matriks dikalikan dengan inversnya, maka akan menghasilkan matriks identitas (I) dan sebaliknya.

Untuk lebih menguatkan kesimpulan sementara Anda tentang invers matriks dan sifat-sifatnya serta untuk mendapatkan gambaran bagaimana mencari invers suatu matriks, perhatikan contoh berikut.

Matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ dengan det(A) = 2 mempunyai invers $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ dengan $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{2}$

Perhatikan contoh-contoh lainnya untuk matriks berukuran 2×2 yang diberikan dalam tabel berikut dan lengkapi informasi yang dibutuhkan.

Tabel 1.4. Hubungan matriks dan inversnya

NO	Matriks A	det(A)	Matriks Invers A^{-1}	det(A^{-1})	$A\,A^{-1}$
1	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$	4	$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{4}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	10	$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{10}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$	–9	$-\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$	$-\frac{1}{9}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	...	$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$	...	...

NO	Matriks A	det(A)	Matriks Invers A^{-1}	det(A^{-1})	$A\,A^{-1}$
5	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$	...	$-\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$	...	...
6	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$	...	...	...	...
7	$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$	...	...	...	...
8	$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	...	...	...	...

Jika diamati pada kolom matriks invers, invers dari matriks yang berukuran 2×2 juga mempunyai ukuran yang sama (mengapa?).

Ayo Menanya

Berdasarkan pengamatan diatas, coba Anda buat minimal 3 pertanyaan lain tentang invers. Upayakan pertanyaan yang Anda buat memuat kata-kata "invers matriks", "determinan".

Ayo Menggali Informasi

Dari sekian banyak pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Adakah kesamaan bentuk matriks invers dari masing-masing matriks?
2. Apa kaitan antara matriks invers dan determinannya?
3. Bisakah kita menurunkan rumus mencari invers suatu matriks?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, lakukanlah kegiatan berikut.

Coba Anda buat matriks-matriks lainnya yang mempunyai invers dan tuliskan di papan tulis. Lengkapi matriks-matriks tersebut dengan nilai determinan masing-masing. Guru Anda akan menuliskan invers dari masing-masing matriks yang sudah dituliskan.

Ayo Menalar

Anda sudah mengumpulkan contoh-contoh matriks yang mempunyai invers sekaligus matriks invers dan determinannya. Pertanyaan selanjutnya yang harus dijawab adalah bagaimana mencari invers suatu matriks jika sudah diketahui sebelumnya bahwa determinan matriks tersebut tidak nol? Berdasarkan tabel 1.4, coba Anda lakukan kegiatan berikut.

(a) Amati kembali kolom matriks dan inversnya. Adakah hubungan antara unsur-unsur pada matriks awal dan unsur-unsur pada matriks invers?

(b) Perhatikan kembali kolom matriks invers. Adakah kesamaan bentuk antara matriks invers yang satu dengan lainnya?

(c) Perhatikan pula kedua kolom determinan. Apa yang bisa Anda simpulkan hubungan antara determinan matriks dan determinan inversnya?

Tuliskan analisa Anda terhadap pertanyaan-pertanyaan di atas di buku Anda. Kemudian, amati kembali bagaimana Anda bisa dapatkan invers dari suatu matriks yang determinannya tidak nol.

Untuk lebih jelasnya, untuk matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $\det(A) \neq 0$ maka inversnya

adalah…

Coba cek hasil yang Anda dapatkan dengan cara mengalikannya dengan matriks asal, yaitu $A \cdot A^{-1}$ dan $A^{-1} \cdot A$. Apakah yang Anda dapatkan?

Bagi siswa yang kreatif dan mempunyai keingintahuan yang tinggi mungkin akan timbul pertanyaan "A*dakah cara lain menentukan invers suatu matriks?*"

Untuk membantu menjawab pertanyaan tersebut, mari kita lakukan kegiatan berikut. Kita misalkan matriks yang akan kita cari inversnya adalah $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Sebelum mencari inversnya, apakah syarat agar A mempunyai matriks invers? Kemudian, kita misalkan matriks inversnya adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$. Berdasarkan informasi yang Anda dapatkan sebelumnya, hubungan antara matriks dan inversnya adalah $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Selanjutnya, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

(a) Jika Anda gunakan fakta bahwa $A \cdot A^{-1} = I$, apakah yang Anda dapatkan?

(b) Dari sistem persamaan tersebut, selesaikan untuk masing-masing w, x, y, dan z dalam bentuk a, b, c, dan d.

(c) Apakah matriks invers yang Anda dapatkan hasilnya sama dengan matriks invers dari kegiatan sebelumnya?

Sekarang Anda tentu sudah mendapatkan kesimpulan mengenai bagaimana mencari invers suatu matriks berukuran 2×2. Lalu bagaimana dengan invers matriks yang berukuran 3×3?

Untuk mengetahui proses mencari invers matriks berukuran 3×3, kita perhatikan kasus matriks ukuran 2×2 terlebih dahulu untuk mendapat gambaran invers matriks yang berukuran lebih besar.

Sebelumnya, amatilah proses mengutak-atik matriks yang merupakan invers matriks: Dari contoh sebelumnya diketahui bahwa matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ mempunyai invers matriks $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Mari kita eksplorasi matriks inversnya,

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (-1)^2 \cdot 5 & (-1)^3 \cdot 3 \\ (-1)^3 \cdot 6 & (-1)^4 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(4\times 5)-(6\times 3)}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 3 \\ (-1)^{2+1} \cdot 6 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$$

Sekarang perhatian kita fokuskan pada:

$$= \frac{1}{(4\times 5)-(6\times 3)}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 3 \\ (-1)^{2+1} \cdot 6 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$$

Untuk membantu proses penalaran Anda, cobalah jawab pertanyaan berikut:

1. Apa makna nilai (4 × 5) – (6 × 3) bila dikaitkan dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$?

2. Matriks $\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 3 \\ (-1)^{2+1} \cdot 6 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$ selanjutnya disebut sebagai ***Matriks Adjoin***, bagaiamana mendapatkan matriks adjoin?

Bila kita perhatikan Matriks Adjoin $\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 3 \\ (-1)^{2+1} \cdot 6 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$, berasal dari transpos suatu matriks, yakni matriks $\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 6 \\ (-1)^{2+1} \cdot 3 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$. Masih ingatkah Anda bahwa matriks $\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 6 \\ (-1)^{2+1} \cdot 3 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$ adalah ***Matriks Kofaktor*** yang sudah dibahas pada subbab determinan?

Dengan demikian, jika matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ mempunyai matriks kofaktor

$C(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 5 & (-1)^{2+1} \cdot 6 \\ (-1)^{2+1} \cdot 3 & (-1)^{2+2} \cdot 4 \end{bmatrix}$, maka Adjoinnya adalah transpos matriks

kofaktor dan dinotasikan dengan $C(A)^t$.

Secara umum, jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ maka kofaktornya adalah $C(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$.

Sehingga matriks adjoin dari A adalah $Adj(A) = C(A)^t = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$.

Pada subbab determinan sudah dibahas sebelumnya mengenai definisi determinan matriks berdasarkan kofaktornya. Ingat bahwa

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12}$$

atau

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22}$$

Namun demikian, coba Anda periksa hasil dari $a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22}$ dan $a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12}$. Apakah yang Anda dapatkan?

Berdasarkan hasil yang Anda peroleh di atas, apa yang Anda dapatkan jika matriks A dikalikan dengan Adjoinnya?

$$\boldsymbol{A \times Adj(A) = \cdots}$$

Serupa dengan matriks berukuran 2×2, coba Anda cek hasil kali matriks berukuran 3×3 dengan Adjoinnya dengan mengambil satu contoh matriks berukuran 3×3. Untuk lebih memudahkan perhitungan Anda, Anda dapat menghitung hasil operasi berikut ini.

$$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = ...$$

$$a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} = ...$$

$$a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} = ...$$

$$a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23} = ...$$

$$a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = ...$$

dan seterusnya.

Jika $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ adalah sebarang matriks berukuran 3×3, dapatkan Anda membuat kesimpulan mengenai hubungan matriks B dengan $adj(B)$?

Berdasarkan uraian tersebut, buat kesimpulan terkait bagaimana menentukan invers dari

a. ***Matriks persegi berordo* 2×2**

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ memiliki invers, invers matriksnya adalah $A^{-1} = ...$

b. ***Matriks persegi berordo* 3×3**

Jika matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ memiliki invers, invers matriksnya adalah $B^{-1} = ...$

Cek hasil yang Anda dapatkan dengan cara mengalikan matriks dengan inversnya. Matriks apakah yang Anda peroleh?

Khusus untuk matriks berordo 2×2, adakah strategi paling cepat dalam menentukan invers matriks? Jika iya, bagaimana strateginya?

Contoh 1.25

Berdasarkan hasil bernalar Anda, apakah matriks-matriks tersebut memiliki invers? Berikan alasannya. Selanjutnya jika memiliki invers, tentukan inversnya.

a. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Contoh 1.26

Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

a. Tentukan syarat agar matriks A mempunyai invers?

b. Bila matriks tersebut memenuhi syarat memilki invers, tentukan inversnya A^{-1}?

c. Karena invers dari suatu matriks juga merupakan matriks, bagaimana dengan nilai determinan dari inversnya?

Ayo Mengomunikasikan

Tuliskanlah kesimpulan yang Anda dapatkan terkait:

a. M*enentukan invers matriks berukuran* 2×2.

b. M*enentukan invers matriks berukuran* 3×3.

Pertukarkan tulisan tersebut dengan teman sebangku/kelompok lainnya. Secara santun, silahkan saling berkomentar, menanggapi komentar, memberikan usul dan menyepakati ide-ide yang paling tepat.

Latihan 1.4

1. Tentukan invers matriks berikut. a. $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. Buatlah matriks A berordo 2×2 yang memiliki invers matriks $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

3. Gunakan matriks persegi B dengan $\det(B) \neq 0$ untuk menunjukkan bahwa
   a. $(B^{-1})^{-1} = B$
   b. $(B^{t})^{-1} = (B^{-1})^{t}$

4. Selidiki bahwa $\det\left(K^n\right) = \left(\det K\right)^n$, untuk matriks;

   a. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ dengan $n = 4$ b. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ dengan $n = 2$

   Catatan: Didefinisikan $K^n = K \times K^{n-1}, n \geq 2$.

5. Jika semua elemen pada salah satu baris matriks persegi adalah nol. Apakah matriks tersebut memiliki invers? Mengapa?

6. Jika matriks persegi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan *a, b, c,* dan *d* adalah bilangan bulat, tentukan semua kemungkinan matriks A yang memenuhi persamaan $A^2 = I$.

7. Adakah suatu matriks yang inversnya adalah diri sendiri?

8. Apa beda soal nomor 6 dan soal nomor 7?

Pengayaan

9. Diketahui A dan B adalah matriks 2x2 dan keduanya memiliki invers. Selidiki apakah berlaku:

   a. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

   b. $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$

10. Misalkan A matriks 2×2 yang memiliki invers. Buktikan bahwa $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

Subbab 1.5 Menyelesaikan Masalah Menggunakan Matriks

Anda telah mempelajari materi tentang penentuan invers dari suatu matriks pada subbab sebelumnya. Ternyata materi tersebut sangat bermanfaat, yaitu sebagai salah satu cara untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Bagaimana matriks invers dapat dijadikan alternatif untuk menyelesaikan sistem persamaan linear? Untuk dapat menjawabnya, Anda perlu mempelajari dan melakukan kegiatan-kegiatan yang terdapat pada subbab ini.

Kegiatan 1.5.1 Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear (SPL)

Contoh 1.27

Pada suatu tempat parkir terdapat 84 kendaraan yang terdiri atas sepeda motor dan mobil. Setelah dihitung jumlah roda seluruhnya adalah 220. Berapakah banyaknya tiap-tiap sepeda motor dan mobil di tempat parkir tersebut?

Sedikit Informasi

Permasalahan tersebut merupakan permasalahan pada sistem persamaan linear. Jika x adalah banyaknya sepeda motor dan y adalah banyaknya mobil, maka dapat dibuat dua persamaan linear berikut.

$x + y = 84$

$2x + 4y = 220$

Masih ingatkah Anda dengan penyelesaian sistem persamaan linear tersebut? Dengan metode substitusi, eliminasi, atau dengan menggambarkan grafiknya, maka akan diperoleh $x = 58$ dan $y = 26$.

Ayo Mengamati

Terdapat cara lain untuk menyelesaikan SPL selain dengan menggunakan metode substitusi, eliminasi, atau dengan menggambar grafik dari SPL. Cara itu disebut dengan metode matriks. Dalam menggunakan metode matriks Anda harus mengingat kembali penentuan invers suatu matriks yang sudah dipelajari pada subbab sebelumnya.

Sekarang kita ingin menyelesaikan sistem persamaan linear di atas dengan menggunakan metode matriks.

Coba perhatikan sistem persamaan linear tersebut. Apakah Anda bisa mengubah sistem persamaan tersebut ke dalam bentuk perkalian matriks? Untuk menguatkan jawaban Anda cobalah perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1.28

Sistem persamaan linear

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 5x + 6y &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Bentuk perkalian matriksnya adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

Contoh 1.29

Sistem persamaan linear $\left.\begin{aligned} x + 3y + z &= 4 \\ 2x + 2y + z &= -1 \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$

Bentuk perkalian matriksnya adalah $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Contoh 1.30

Sistem persamaan linear $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$

Bentuk perkalian matriksnya adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

Setelah memperhatikan contoh-contoh tersebut, isilah tabel berikut ini.

Sistem Persamaan Linear	Perkalian matriks
$3x + 5y = 5$ $x + 2y = 7$	$\begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}$
$x + 2y = 7$ $x + 3y = 13$	$\begin{bmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}$

Sistem Persamaan Linear	Perkalian matriks
$x - 2y + z = 6$ $2x - 5y + z = 1$ $3x - 7y + 2z = -1$	$\begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}$
$x + y + 2z = 8$ $-x - 2y + 3z = 1$ $3x - 7y + 4z = 10$	$\begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}$

Ayo Menanya

Setelah Anda mengisi tabel di atas, coba buatlah pertanyaan tentang pengubahan sistem persamaan linear ke bentuk perkalian matriks yang memuat kata-kata "matriks koefisien variabel", "matriks variabel" dan "matriks konstanta".

Ayo Menggali Informasi

Dari sekian banyak pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Apakah matriks konstanta dalam sistem persamaan tersebut merupakan hasil kali antara matriks koefisien variabel dengan matriks variabelnya?
2. Apakah semua sistem persamaan linear dapat diubah ke bentuk perkalian matriks koefisien dengan matriks variabelnya ?

Coba cek soal-soal pada tabel di atas. Kemudian buatlah beberapa (minimal 5) sistem persamaan linear dan buatlah persamaan matriksnya pada tempat berikut ini.

Ayo Menalar

Dari Contoh 1.27 dan hasil pengisian tabel di atas, bisakah Anda menjelaskan bagaimana cara mengubah sistem persamaan linear menjadi bentuk perkalian matriks? Misalkan matriks koefisien = A, matriks variabel = X dan matriks konstanta = B, maka sistem persamaan linear dapat diubah menjadi bentuk perkalian matriks seperti apa?

Ayo Mengomunikasikan

Tulislah kesimpulan Anda tentang cara mengubah sistem persamaan linear menjadi bentuk perkalian matriks, kemudian tukarkan kesimpulan tersebut dengan teman sebangku.

Latihan

Tulislah sistem persamaan linear berikut dalam bentuk persamaan matriks.

1. $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 3x + 4y = 14 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l} 3x + y = 3 \\ 2x - 2y = 2 \end{array}\right\}$

4. $\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 5y + 3z = 3 \\ x + 8z = 17 \end{array}$

5. $\begin{array}{l} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{array}$

Ayo Mengamati

Sebelumnya telah disimpulkan cara untuk mengubah sistem persamaan linear ke dalam bentuk perkalian matriks. Sistem persamaan linear pada Contoh 1.27 dapat dibentuk menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 220 \end{bmatrix}$$

Kita misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} 84 \\ 220 \end{bmatrix}$. Sehingga perkalian matriks di atas dapat kita tulis menjadi $AX = B$ .... (1)

Anda tentu tahu bahwa invers dari matriks A adalah $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ atau bisa dituliskan sebagai $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Sekarang kita akan mempelajari bagaimana menyelesaikan sistem persamaan linear di atas dengan menggunakan metode matriks.

Sebelum Anda mempelajari metode tersebut, masih ingatkah Anda cara menyelesaikan persamaan linear $2x = 6$? Jika Anda mengalikan kedua ruas persamaan tersebut dengan invers perkalian 2 yaitu $\frac{1}{2}$, maka diperoleh

$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(6)$$

Jadi $x = 3$.

Lakukan hal yang sama untuk persamaan (1). Kalikan kedua ruas dengan invers matriks A yaitu A^{-1}. Apa yang anda peroleh? Tuliskan pada tempat berikut ini.

Ayo Menanya

Berdasarkan pengamatan yang Anda lakukan, coba buatlah pertanyaan yang memuat kata-kata “matriks variabel”, “matriks invers koefisien variabel” dan “matriks konstanta”.Tuliskan pertanyaan Anda pada tempat berikut ini.

Ayo Menggali Informasi

Agar Anda lebih yakin, coba lengkapi tabel berikut ini.

No.	Matriks koefisien (A)	Matriks variabel (X)	Matriks konstanta (B)	Invers matriks koefisien (A^{-1})	$A^{-1}AX$	$A^{-1}B$
1.	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 84 \\ 220 \end{bmatrix}$			
2.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$			
3.	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$			
4	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$			

Setelah mengalikan kedua ruas pada persamaan (1) dengan A^{-1} dan dari hasil pengisian tabel di atas apa yang dapat Anda simpulkan? Tuliskan kesimpulan Anda pada tempat berikut ini.

Ayo Menalar

Perhatikan matriks No.1 pada tabel di atas, matriks tersebut merupakan matriks untuk Contoh 1.27. Setelah itu perhatikan isi kolom $A^{-1}B$ yang bersesuaian, kemudian bandingkan dengan penyelesaian Contoh 1.27 sebelumnya. Apa yang dapat anda simpulkan? Lakukan hal yang sama untuk matriks untuk nomor 2, 3, dan 4.

Berdasarkan informasi yang Anda dapatkan, coba jelaskan bagaimana cara menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks. Untuk sistem persamaan (1), anda bisa menuliskan penyelesaiannya sebagai hasil perkalian antara matriks apa?

Sekarang, coba Anda cari penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut.

$2x + 3y = 7$

$4x + 6y = 13$

Berapa determinan dari matriks A (matriks koefisien) dari SPL di atas? Bisakah Anda menentukan invers matriks A? Bisakah Anda menentukan penyelesaian dari soal tersebut? Dari beberapa pertanyaan tersebut, buatlah kesimpulan mengenai penentuan penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks. Jelaskan mengenai pengaruh nilai determinan matriks koefisien terhadap penyelesaian SPL tersebut. Tuliskan jawaban Anda pada tempat berikut ini.

Ayo Mengomunikasikan

Presentasikan kesimpulan Anda tentang cara menyelesaikan SPL dengan matriks serta pengaruh determinan matriks terhadap penyelesaian SPL tersebut di depan kelas. Perhatikan kesimpulan yang dipresentasikan oleh teman Anda.

Kegiatan 1.5.2 Memodelkan dan Menyelesaikan Masalah Sehari-hari yang Berkaitan dengan SPL Tiga Variabel Menggunakan Matriks

Ayo Mengamati

Perhatikan contoh permasalahan sehari-hari berikut ini.

Contoh 1.31

Suatu perusahaan taksi memiliki 3 jenis mobil taksi yaitu Jenis X, Jenis Y, dan jenis Z. Jumlah keseluruhah mobil taksi yang dimiliki adalah 100 mobil. Mobil-mobil tersebut ditempatkan di 2 pangkalan taksi yaitu pangkalan taksi A dan pangkalan taksi B. Di pangkalan taksi A ditempatkan $\frac{1}{2}$ dari mobil Jenis X, $\frac{1}{4}$ dari mobil Jenis Y, dan $\frac{1}{5}$ dari mobil jenis Z. Jumlah keseluruhan mobil taksi di pangkalan A adalah 30. Di pangkalan taksi B ditempatkan $\frac{1}{2}$ dari mobil Jenis X, $\frac{1}{2}$ dari mobil Jenis Y, dan $\frac{1}{5}$ dari mobil jenis Z. Jumlah keseluruhan mobil taksi di pangkalan B adalah 35. Sedangkan mobil taksi lainnya melayani penumpang. Tentukan banyaknya masing-masing jenis mobil taksi yang dimiliki.

Contoh 1.31 di atas merupakan contoh sistem persamaan linear tiga variabel. Sekarang kita ingin menyelesaikan sistem persamaan linear di atas dengan menggunakan metode matriks.

Misal x adalah banyaknya mobil jenis X, y adalah banyaknya mobil jenis Y, dan z adalah banyaknya mobil jenis Z. Jumlah keseluruhan mobil taksi yang dimiliki adalah 100 sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut

$$x + y + z = 100$$

Banyaknya taksi di pangkalan A adalah 30 dan di pangkalan B adalah 35 sehingga banyaknya taksi yang melayani penumpang adalah 100 – 65 = 35.

Sistem persamaan linear yang dapat dibentuk dari Contoh 1.31 adalah sebagai berikut

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{5}z=30$$

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{5}z=35$$

$$\frac{1}{4}y+\frac{6}{10}z=35$$

Masih ingatkah Anda dengan penyelesaian sistem persamaan linear tersebut?

Ayo Menanya

Berdasarkan pengamatan yang Anda lakukan, diharapkan muncul pertanyaan berdasar Contoh 1.31. Tuliskan pertanyaan Anda pada tempat berikut ini.

Ayo Menggali Informasi

Dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, akan muncul pertanyaan-pertanyaan sebagai berikut:

1. Apakah matriks yang dihasilkan dari sistem persamaan linear dengan tiga variabel tersebut memiliki determinan yang tidak nol?
2. Apakah matriks yang dihasilkan dari sistem persamaan linear dengan tiga variabel tersebut memiliki matriks invers?
3. Apakah SPL dengan tiga variabel tersebut dapat diselesaikan?

Ayo Menalar

Berdasarkan informasi yang Anda dapatkan, coba jelaskan bagaimana cara menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan menggunakan matriks. Sekarang, coba Anda cari penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan tiga variabel dari Contoh 1.31. Tuliskan penyelesaian SPL dari Contoh 1.31 (beserta caranya) pada tempat yang telah disediakan berikut ini.

Ayo Mengomunikasikan

Berdasarkan hasil mengamati dan menyelesaikan Contoh 1.31, tuliskan kesimpulan Anda tentang cara memodelkan dan menyelesaikan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan SPL tiga variabel. Diskusikan hasil yang Anda temukan dengan teman sekelompok, kemudian tukarkan hasil diskusi tersebut dengan kelompok lain dan beri komentar terhadap hasil kelompok lain.

Setelah Anda dapat menyelesaikan sistem persamaan linear pada Kegiatan 1.5.1 dan Kegiatan 1.5.2, Anda telah dapat menentukan bilamana suatu masalah dalam bentuk sistem persamaan linear dapat dicari selesaiannya atau tidak.

Latihan 1.5

1. Lusi mempunyai uang Rp150.000,00 lebihnya dari uang Sinta. Jika tiga kali uang Lusi ditambah dua kali uangnya Sinta jumlahnya adalah Rp950.000,00. Tentukan besar masing-masing uang Lusi dan Sinta!

2. Irfan dan Roni bekerja di pabrik kaos bagian menyablon logo. Irfan dapat menyablon 300 kaos setiap jam, sedangkan Roni dapat menyablon 200 kaos setiap jam. Lama waktu mengerjakan Irfan dan Roni tidak sama. Jumlah jam kerja Irfan dan Roni adalah 50 jam dengan banyak kaos yang telah disablon sebanyak 12.400 kaos. Berapa lama kerja Irfan dan Roni?

3. Ingat kembali bahwa persamaan $ax + by = c$ dengan a, b, dan c adalah konstanta menyatakan persamaan garis lurus. Carilah penyelesaian sistem persamaan linear berikut.

   $$2x - 3y = 6$$

   $$x + 2y = 3$$

   Kemudian gambarlah garis lurus dari masing-masing persamaan linear pada satu diagram. Apakah yang dapat disimpulkan tentang koordinat titik potong kedua garis dengan penyelesaian sistem persamaan linear di atas?

4. Diketahui sistem persamaan linear

   $$2x - 3y = 6$$
   $$2x - 3y = 9$$

   a) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode matriks.

b) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode eliminasi.
c) Metode manakah yang lebih cocok untuk menyelesaikan sistem persamaan linear di atas.
d) Gambarlah garis lurus untuk tiap-tiap persamaan linear pada satu diagram.
e) Apakah yang dapat disimpulkan tentang penyelesaian sistem persamaan linear dengan kedudukan kedua garis untuk setiap sistem persamaan.

5. Diketahui sistem persamaan linear

$$2x - 3y = 6$$

$$4x - 6y = 12$$

a) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode matriks.
b) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode eliminasi.
c) Metode manakah yang lebih cocok untuk menyelesaikan sistem persamaan linear di atas.
d) Gambarlah garis lurus dari tiap-tiap persamaan linear pada satu diagram.
e) Apakah yang dapat disimpulkan tentang penyelesaian sistem persamaan linear dengan kedudukan kedua garis untuk tiap-tiap sistem persamaan.
f) Berdasarkan soal no 4 – 5 (e) buatlah kesimpulan tentang banyaknya penyelesaian sistem persamaan linear.
g) Berdasarkan soal no 4 dan 5, buatlah kesimpulan bilamana metode matriks tidak dapat digunakan.

6. Pada saat ingin menonton film ke bioskop, Ida, Ahmad, dan Putra masing-masing membeli snack. Ida membeli dua cokelat, satu minuman dan dua bungkus popcorn dengan membayar Rp29.000,00. Ahmad menghabiskan Rp19.000,00 karena membeli satu cokelat , dua minuman dan satu bungkus pop corn. Sedangkan Putra membeli dua minuman dan tiga bungkus pop corn dengan menghabiskan Rp33.000,00. Berapa harga dari tiap-tiap snack?

7. Sudut suatu segitiga yang berukuran sedang adalah 30^0 lebih besar daripada sudut yang terkecil. Sudut yang terbesar 10^0 lebih besar daripada sudut sedang. Berapakah besar tiap-tiap sudut?

8. Diberikan penyelesaian sistem persamaan linear adalah $x = \frac{1}{2}$ dan $y = -\frac{2}{3}$. Susunlah 3 sistem persamaan linear yang masing-masing terdiri atas 2 persamaan linear dengan dua variabel dan penyelesaiannya adalah nilai x dan y di atas!

Untuk soal no. 9 – 10, carilah solusi persamaan linear dengan menggunakan matriks.

9. $2x - 3y + z = -9$
   $2x + y - z = 9$
   $x + y + z = 5$

10. $x + y - z = -4$.
    $2x + 4y + 2z = 10.$
    $x + 3y + z = 4$

11. Diketahui sistem persamaan linear
    $2x + 3y + z = 0$
    $x + 2y + 3z = 0$
    $3x + 2y + z = 0$
    a) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks!
    b) Apakah perbedaan sistem persamaan linear di atas dengan sistem persamaan linear pada no 9 – 10?

12. Diketahui sistem persamaan linear

$$x + 2y + 2z = -3$$
$$2x - y + 2z = 9$$
$$3x + y + 4z = 8$$

a. Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks.
b. Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan eliminasi.
c. Metode manakah yang lebih cocok untuk menyelesaikan sistem persamaan linear di atas.
d. Apakah yang dapat disimpulkan tentang penyelesaian sistem persamaan linear di atas.
e. Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linear di atas jika semua bilangan di ruas kanan diganti dengan 0.

13. Diketahui sistem persamaan linear

$$-2x - z = -3$$
$$-x + y + z = -1$$
$$-6x + 2y = -8$$

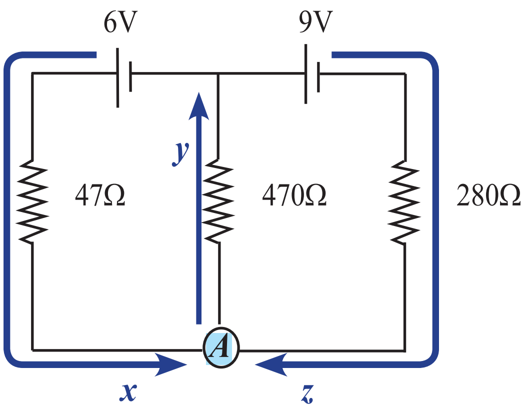
a) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan matriks.
b) Carilah penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan eliminasi.
c) Metode manakah yang lebih cocok untuk menyelesaikan sistem persamaan linear di atas.
d) Apakah yang dapat disimpulkan tentang penyelesaian sistem persamaan linear.
e) Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linear di atas jika semua ruas kanan diganti dengan 0.
f) Berdasarkan hasil yang diperoleh dari soal 9 – 13(e), apakah yang dapat disimpulkan tentang banyaknya penyelesaian sistem persamaan linear.

14. Suatu rangkaian listrik terdiri dari dua baterai (6 V dan 9 V) dan tiga resistor (47 ohm, 470 ohm, dan 280 ohm). Baterai-baterai tersebut menghasilkan aliran arus listrik pada rangkaian. Misal x, y dan z merepresentasikan arus dalam ampere yang mengalir melewati masing-masing resistor. Voltasi yang melewati masing-masing resistor adalah arus listrik dikalikan dengan resistansinya (V= IR). Hal tersebut menghasilkan dua persamaan loop pada rangkaian sebagai berikut:

    $47x + 470y = 6$

    $280z + 470y = 9$

    Arus listrik yang mengalir ke masing-masing titik pada rangkaian harus mengalir keluar. Jadi, di persimpangan A, $x + z - y = 0$. Tentukan arus yang mengalir melalui masing-masing resistor!



Sumber: Discovering Algebra, an Investigative Approach

15. Carilah penyelesaian sistem persamaan berikut

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{z} = 1$$

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{z} = 7$$

$$\frac{6}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 2$$

16. Pada suatu taman ria ada 3 jenis wahana bermain: Jolly, Adventure dan Thrill. Karcis masuk gratis jika membeli satu paket tiket, termasuk 10 tiket untuk tiap-tiap wahana. Atau Anda dapat membayar Rp50.000,00 untuk karcis masuk dan kemudian membeli tiket untuk masing-masing wahana secara tersendiri. Noah, Rita, dan Carey memutuskan untuk membayar karcis masuk dan membeli tiket secara individu. Noah membayar Rp195.500,00 untuk 7 wahana Jolly, 3 wahana Adventure dan 9 wahana Thrill. Rita membayar Rp130.000,00 untuk 9 wahana Jolly, 10 wahana Adventure. Carey membayar Rp249.500,00 untuk 8 wahana Jolly, 7 wahana Adventure dan 10 wahana Thrill. (harga tersebut belum termasuk tiket masuk)
    a. Berapa harga tiap-tiap wahana?
    b. Berapa yang harus dibayar untuk satu paket tiket lengkap?
    c. Apakah Noah, Rita dan Carey sebaiknya membeli satu paket tiket lengkap?

Sumber: Discovering Algebra, an Investigative Approach

17. Tomi dan Budi secara bersamaan membutuhkan waktu 12 menit untuk mencuci sepeda motor. Budi dan Benny secara bersamaan membutuhkan waktu 15 menit untuk menyelesaikan pekerjaan yang sama. Sedangkan Tomi dan Benny secara bersamaan membutuhkan waktu 20 menit untuk mencuci sepeda motor yang sama. Tentukan berapa menit yang diperlukan oleh Tomi, Budi, dan Benny untuk mencuci sepeda motor yang sama secara bersama-sama.

18. Carilah himpunan solusi sistem persamaan berikut

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{xz}{x+z} = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Petunjuk : Tulis $\dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{1}{4}$ sebagai $\dfrac{x+y}{xy} = 4$. Demikian juga dengan kedua persamaan lainnya.

19. Diberikan penyelesaian sistem persamaan linear adalah $x = 2$, $y = -3$, dan $z = -2$.
Susunlah 3 sistem persamaan linear dengan setiap sistem terdiri atas 3 persamaan linear dengan 3 variabel dan penyelesaiannya adalah nilai x, y dan z di atas.

20. Susunlah suatu sistem persamaan linear dengan 3 persamaan linear dan 3 variabel yang memiliki tak hingga banyaknya penyelesaian.

21. Carilah penyelesaian sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} \sin\alpha + \cos\beta + 2\tan\gamma &= 2 \\ \sin\alpha - 2\cos\beta + \tan\gamma &= 3 \\ 2\sin\alpha - \cos\beta - 2\tan\gamma &= 3 \end{aligned}$$

dengan $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$, $0 \le \gamma \le 2\pi$.

Bab
2

Bunga, Pertumbuhan, dan Peluruhan

Kompetensi Dasar Dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1.1 Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya. 2.1 Menghayati perilaku disiplin, sikap kerjasama, sikap kritis dan cermat dalam bekerja menyelesaikan masalah kontekstual.3.2 Mendeskripsikan konsep barisan dan deret pada konteks dunia nyata, seperti bunga, pertumbuhan, dan peluruhan. 4.2 Mengidentifikasi, menyajikan model matematika dan menyelesaikan masalah keseharian yang berkaitan dengan barisan dan deret aritmetika, geometri dan yang lainnya.	Melalui pembelajaran pertumbuhan dan peluruhan, siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengamati dan mendeskripsikan karakteristik masalah pertumbuhan dan peluruhan. 2. Mengamati dan menerapkan konsep barisan dan deret geometri untuk menyelesaikan masalah pertumbuhan dan peluruhan.

Biografi Leonard Euler

Sumber: wikipedia.org

Leonhard Euler (1707 – 1783) merupakan tokoh dominan dari matematika abad kedelapanbelas dan pengarang matematika yang paling subur sepanjang masa. Lahir dekat Besel, Swiss, ia belajar kepada orang bangsanya Johann Bernoulli dan telah menerbitkan makalah-makalah pada usia 18 tahun. Ia menjabat di Universitas Besel, St. Petersburg Academy of Sciences. Pada waktu ia meninggal, disebutkan bahwa semua matematikawan Eropa adalah mahasiswanya.

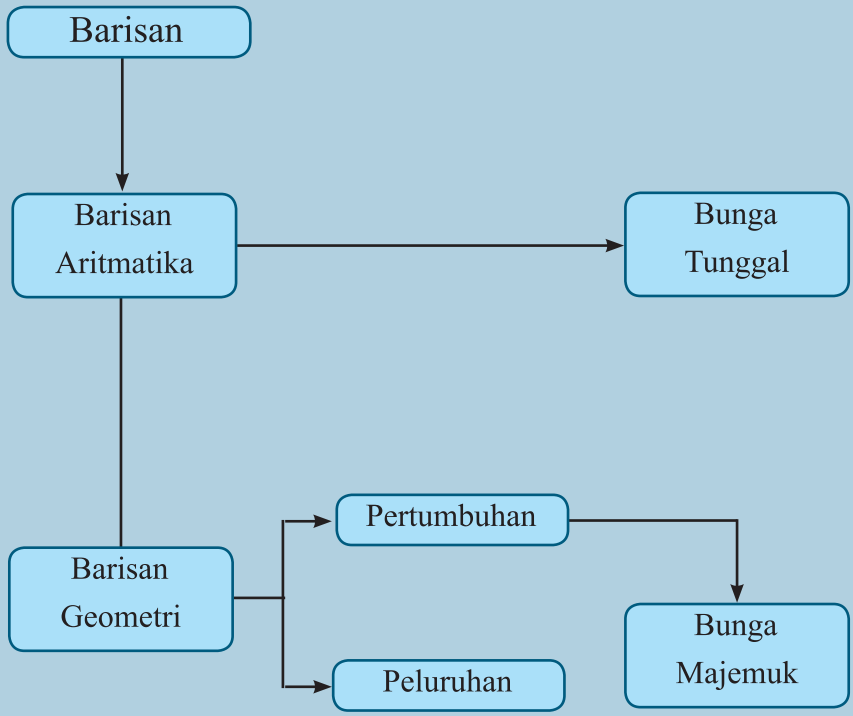
Minat Euler terentang di semua matematika dan fisika. Ia memperkenalkan e sebagai bilangan dasar untuk logaritma asli, memperlihatkan bahwa e dan e^2 adalah tak rasional, dan menemukan hubungan luar biasa $e^{i\pi} = -1$. Kebutaan selama 17 tahun terakhir dari hidupnya tidak menghambat karyanya. Sebagian disebabkan oleh daya ingatnya yang ajaib. Ia mengetahui dalam hati rumus-rumus trigonometri dan analisis. Dikatakan bahwa ia telah mengerjakan suatu perhitungan sampai 50 posisi desimal di dalam kepalanya. Selain itu, Euler adalah seorang pecinta keluarga, yang seringkali menghabiskan waktu sore harinya bersama 13 putra-putrinya dengan membangun permainan-permainan ilmiah.

Sumber : wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
Verberg, D., E. J. Purcell, and S. E. Steven. 2007. Calculus 8th. NJ: Pearson Education

Hikmah yang mungkin bisa kita petik adalah:

Keterbatasan fisik tidak menghambat seseorang untuk menghasilkan karya yang fantastis.

Peta Konsep


Barisan
Barisan Aritmatika
Bunga Tunggal
Barisan Geometri
Pertumbuhan
Peluruhan
Bunga Majemuk

Subbab 2.1 Bunga Tunggal Dan Bunga Majemuk

Kegiatan 2.1.1 Mengenal Bunga Tunggal dan Bunga Majemuk

Cerita 1

Pak Rian berencana menginvestasikan uangnya sebesar Rp50.000.000,00 di bank dengan keinginan mendapatkan keuntungan yang besar. Dia memasuki bank lokal *A* di daerahnya dan bertemu dengan pegawai di sana. Bank tersebut menawarkan program investasi dengan bunga tunggal 10% tiap tahunnya selama 5 tahun. Pak Rian akan menerima bunga setiap tahunnya sejumlah Rp5.000.000,00. Sebelum memutuskan berinvestasi, Pak Rian pergi ke bank lokal *B* yang yang tidak jauh dari bank sebelumnya. Bank *B* menawarkan program investasi dengan modal sama selama 5 tahun tetapi dengan bunga majemuk 9% tiap tahunnya. Pak Rian membuat perhitungan sendiri yang dapat dilihat di tabel investasi Bank *A* dan Bank *B* di bawah ini:

Program Investasi Bank *A* dan Bank *B*

Tahun	Bunga Bank A	Saldo A	Bunga Bank B	Saldo B
0	0	Rp50.000.000,00	0	Rp50.000.000,00
1	Rp5.000.000,00	Rp55.000.000,00	Rp4.500.000,00	Rp54.500.000,00
2	Rp5.000.000,00	Rp60.000.000,00	Rp4.905.000,00	Rp59.405.000,00
3	Rp5.000.000,00	Rp65.000.000,00	Rp5.346.450,00	Rp64.751.450,00
4	Rp5.000.000,00	Rp70.000.000,00	Rp5.827.630,50	Rp70.579.080,50
5	Rp5.000.000,00	Rp75.000.000,00	Rp6.352.117,245	Rp76.931.197,745
Saldo Akhir		Rp75.000.000,00		Rp76.931.197,745

Walaupun suku bunga yang ditawarkan Bank *B* lebih kecil dari Bank *A*, tetapi program investasi dengan bunga majemuk di Bank *B* lebih menguntungkan daripada bunga tunggal di Bank *A*. Dengan perhitungan yang cermat, Pak Rian memutuskan untuk menginvestasikan uangnya pada Bank *B*.

Cerita 2

Andi adalah seorang mahasiswa Teknik Sipil sebuah universitas ternama di Malang. Dia aktif di kegiatan mahasiswa termasuk klub fotografi. Andi menginginkan sebuah kamera bagus untuk kegiatannya di klub tersebut. Tetapi, harga kamera yang diinginkan sebesar Rp15.000.000,00. Dana yang cukup besar bagi seorang mahasiswa. Andi mendapatkan tawaran pinjaman dari BPR *A* dengan bunga tunggal 2% selama 2 tahun dan dari BPR *B* dengan bunga majemuk 2% selama 2 tahun.

Andi membuat perhitungan sendiri sebelum menentukan pilihan sebagai berikut:

Pinjaman BPR *A* dan BPR *B*

Tahun	Bunga *A*	Pinjaman *A*	Bunga *B*	Pinjaman *B*
0	0	Rp15.000.000,00	0	Rp15.000.000,00
1	Rp300.000,00	Rp15.300.000,00	Rp300.000,00	Rp15.300.000,00
2	Rp300.000,00	Rp15.600.000,00	Rp306.000,00	Rp15.606.000,00
Total Pinjaman		Rp15.600.000,00		Rp15.606.000,00

Terdapat selisih besar pengembalian dana di BPR *A* dan BPR *B*. Dengan perhitungan yang teliti, Andi memutuskan untuk meminjam dana di BPR *A*.

Ayo Mengamati

Perhatikan beberapa contoh permasalahan investasi dan pinjaman berikut ini:

1. Tomi meminjam uang di koperasi pegawai sebesar Rp100.000.000,00 untuk membeli mobil baru. Pinjaman yang diberikan selama 3 tahun dengan bunga 8%. Tomi harus membayar bunga sebesar Rp8.000.000,00 per tahun. Tomi membayar lunas pinjaman dan bunganya sebesar Rp124.000.000,00 di akhir masa pinjamannya.

2. Dani akan membeli sepeda motor seharga Rp20.000.000,00. Dia berencana akan meminjam uang ke suatu bank dengan bunga 8% selama 3 tahun. Dani diharuskan membayar bunga tiap tahunnya dengan besar yang berbeda. Pada tahun pertama, bunganya sebesar Rp1.600.000,00. Pada tahun kedua, bunga pinjamannya sebesar Rp1.728.000,00. Sedangkan bunga pada tahun ketiga adalah Rp1.866.240,00. Jadi, Dani harus membayar lunas pinjaman dan bunganya sebesar Rp25.194.240,00.

3. Pak Lukman dan istrinya akan menabungkan uangnya masing-masing sebesar Rp5.000.000,00 di tempat yang berbeda. Pak Lukman memilih menabungkan uangnya di bank "PRIMA" dengan bunga 6% sedangkan Bu Lukman menabungkan uangnya di bank "SENTOSA" dengan bunga yang sama. Selama 3 tahun mereka tidak pernah mengambil maupun menambah tabungannya. Ketika masing-masing mengambil uangnya di bank, Pak Lukman dan istrinya mendapat rincian sebagai berikut:

Rincian tabungan Pak Lukman dan Bu Lukman

Tahun	Bunga Bank "PRIMA"	Saldo Pak Lukman	Bunga Bank "SENTOSA"	Saldo Bu Lukman
0	0	Rp5.000.000,00	0	Rp5.000.000,00
1	Rp300.000,00	Rp5.300.000,00	Rp300.000,00	Rp5.300.000,00
2	Rp318.000,00	Rp5.618.000,00	Rp300.000,00	Rp5.600.000,00
3	Rp337.080,00	Rp5.955.080,00	Rp300.000,00	Rp5.900.000,00

Pak Lukman dan istrinya mendapatkan total dana yang berbeda satu sama lain meskipun suku bunga yang ditawarkan sama.

4. Pak Amir meminjam uang sebesar Rp1.000.000,00 di KUD "MAJU" untuk membeli pupuk. KUD memberikan pinjaman dengan bunga sebesar 5% tiap bulannya. Pak Amir mampu melunasi hutangnya selama 4 bulan setelah masa panen. Total pinjaman yang harus dilunasi sebesar Rp1.200.000,00 dengan bunga Rp50.000,00 tiap bulannya.

Dari beberapa permasalahan di atas, contoh 1, contoh 3 untuk Bu Lukman, dan contoh 4 adalah contoh bunga tunggal pada tabungan atau pinjaman. Sedangkan contoh 2 dan contoh 3 untuk Pak Lukman adalah contoh bunga majemuk pada tabungan atau pinjaman.

Ayo Menanya

Dari pengamatan Anda terhadap permasalahan di atas, tulislah minimal 4 pertanyaan yang memuat kata-kata "barisan aritmetika", "barisan geometri", "bunga tunggal", "bunga majemuk", "pinjaman" dan "simpanan".

Ayo Menggali Informasi

Coba amati kembali permasalahan dan pertanyaan yang sudah Anda buat, mungkin pertanyaan-pertanyaan Anda ada di antara pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Konsep barisan apa yang digunakan dalam menghitung bunga tunggal?
2. Konsep barisan apa yang digunakan dalam menghitung bunga majemuk?
3. Bagaimana cara menghitung bunga tunggal pada simpanan atau pinjaman?
4. Bagaimana cara menghitung bunga majemuk pada simpanan atau pinjaman?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan yang sudah Anda buat, ada baiknya Anda perhatikan bagaimana cara kerja prosentase, barisan, dan deret aritmetika, juga barisan dan deret geometri. Buatlah kesimpulan sementara dari hasil pengamatan Anda. Carilah informasi dari beberapa buku referensi, internet, atau sumber yang lain untuk menguatkan dugaan Anda.

Carilah soal-soal mengenai bunga tunggal dan majemuk pada soal-soal UN, OSN, atau SBMPTN di tahun-tahun yang lalu. Dari contoh-contoh tersebut, dengan menggunakan kesimpulan sementara yang Anda buat, dapatkah Anda mengelompokkan mana yang merupakan masalah bunga tunggal dan mana yang merupakan masalah bunga majemuk?

Ayo Menalar

Berikut ini diberikan beberapa permasalahan yang melibatkan bunga tungggal dan bunga majemuk.

Masalah mengenai bunga tunggal

1. Adi mendapatkan dana pinjaman dari yayasan pendidikan "Indonesia Pintar" untuk melanjutkan pendidikan ke jenjang yang lebih tinggi dengan pinjaman Rp20.000.000,00 dengan bunga tunggal 5% per tahun selama 4 tahun. Adi membayar lunas pinjamannya setelah 4 tahun sebesar Rp24.000.000,00 dengan rincian pinjaman sebagai berikut:

Tahun	Bunga	Pinjaman
0	0	Rp 20.000.000,00
1	Rp 1.000.000,00	Rp 21.000.000,00
2	Rp 1.000.000,00	Rp 22.000.000,00
3	Rp 1.000.000,00	Rp 23.000.000,00
4	Rp 1.000.000,00	Rp 24.000.000,00

2. Subhan akan mendirikan sebuah toko komputer di sebuah pusat perbelanjaan di Malang. Subhan membutuhkan dana sebesar Rp100.000.000,00 yang akan diperolehnya dari pinjaman bank. Jika dia meminjan dana tersebut dengan pelunasan dalam jangka waktu 5 tahun dengan bunga tunggal 8% per tahun, maka setiap tahunnya pinjamannya bertambah sebesar Rp8.000.000,00. Di akhir tahun kelima, Subhan membayar lunas pinjamannya sebesar Rp140.000.000,00.

3. Doni menabungkan uangnya di bank sebesar Rp10.000.000,00 di bank dengan bunga tunggal 6% per tahun. Setelah 5 bulan Doni mengambil semua uangnya untuk membayar biaya sekolahnya. Doni mendapatkan uang sebesar Rp10.250.000,00 dengan rincian sebagai berikut

Bulan	Bunga	Saldo
0	0	Rp10.000.000,00
1	Rp50.000,00	Rp10.050.000,00
2	Rp50.000,00	Rp10.100.000,00
3	Rp50.000,00	Rp10.150.000,00
4	Rp50.000,00	Rp10.200.000,00
5	Rp50.000,00	Rp10.250.000,00

4. Abi meminjam uang sebesar Rp150.000.000,00 di bank untuk membeli sebuah mobil dengan bunga tunggal 7% selama 5 tahun. Akibatnya bunga yang harus dibayarkan Abi sebesar Rp10.500.000,00 per tahun. Abi dapat membayar lunas pinjamannya selama 5 tahun dengan membayarkan Rp3.375.000,00 setiap bulannya.

Masalah mengenai bunga majemuk

1. Sarah menabungkan uangnya sebesar Rp5.000.000,00 di bank yang menjanjikan bunga majemuk 5% per tahun. Setelah 3 tahun, Sarah mengambil semua uangnya. Sarah mendapatkan uang sebesar Rp5.788.125,00 dengan rincian sebagai berikut.

Tahun	Bunga	Saldo
0	0	Rp5.000.000,00
1	Rp250.000,00	Rp5.250.000,00
2	Rp262.500,00	Rp5.512.500,00
3	Rp275.625,00	Rp5.788.125,00

2. Sinta meminjam uang di koperasi untuk membeli mobil sebesar Rp75.000.000,00 dengan bunga majemuk 3% selama 3 tahun. Sinta mendapatkan rincian pinjamannya yang harus dibayarkan di akhir tahun ketiga sebagai berikut.

Tahun	Bunga	Pinjaman
0	0	Rp75.000.000,00
1	Rp2.250.000,00	Rp77.250.000,00
2	Rp2.317.500,00	Rp79.567.500,00
3	Rp2.387.025,00	Rp81.954.525,00

3. Pak Ali meminjam uang di bank untuk membeli motor sebesar Rp20.000.000,00 selama 3 tahun. Bank tersebut memberikan bunga majemuk 5% per tahun yang dikenakan setiap 6 bulan. Berikut adalah rincian pinjaman Pak Ali selama 3 tahun yang disajikan untuk setiap periode penambahan bunga. Pinjaman yang harus dilunasi Pak Ali di tahun ketiga sebesar Rp23.193.862,22.

Periode	Bunga	Pinjaman
0	0	Rp20.000.000,00
1	Rp500.000,00	Rp20.500.000,00
2	Rp512.500,00	Rp21.012.500,00
3	Rp525.312,50	Rp21.537.812,50
4	Rp538.445,31	Rp22.076.257,81
5	Rp551.906,45	Rp22.628.158,26
6	Rp565.703,96	Rp23.193.862,22

4. Rina akan menabung uangnya di bank yang menjanjikan bunga majemuk 9% per tahun yang diberikan setiap 4 bulan sekali. Dia memutuskan untuk menabung sebesar Rp2.000.000,00. Setelah 2 tahun Rina mengambil semua uangnya di bank tersebut sebesar Rp2.388.104,59 dengan rincian setiap periode 4 bulan sebagai berikut.

Periode	Bunga	Saldo
0	0	Rp2.000.000,00
1	Rp60.000,00	Rp2.060.000,00
2	Rp61.800,00	Rp2.121.800,00
3	Rp63.654,00	Rp2.185.454,00
4	Rp65.563,62	Rp2.251.017,62
5	Rp67.530,53	Rp2.318.548,15
6	Rp69.556,44	Rp2.388.104,59

Dari permasalahan yang telah diberikan, tulislah kesimpulan awal atau dugaan awal mengenai apa itu bunga tunggal dan bunga majemuk, barisan atau deret apa yang digunakan untuk menghitung bunga tunggal dan bunga majemuk serta ciri-ciri bunga tunggal dan bunga majemuk. Untuk mengamati cara kerja bunga tunggal dan bunga majemuk, Anda mungkin perlu mengingat deret aritmetika maupun deret geometri.

Anda dapat mendiskusikan hasil dugaan awal dengan siswa/kelompok lainnya untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat. Dari dugaan awal tersebut, coba Anda tentukan permasalahan berikut merupakan permasalahan yang melibatkan bunga tunggal atau bunga majemuk dan jelaskan mengapa demikian.

Contoh 2.1

Lina mendapatkan tawaran investasi dari dua bank dengan modal investasi yang sama yaitu sebesar Rp20.000.000,00 selama 3 tahun. Bank "*A*" menawarkan bunga tunggal sebesar 8% per tahun, sedangkan Bank "*B*" menawarkan bunga majemuk 7% per tahun. Jika Lina investasi ke Bank "*A*" maka di akhir tahun ketiga Lina akan mendapatkan uang Rp24.800.000,00. Di lain pihak, investasi di Bank "*B*" akan menghasilkan uang Rp24.500.860,00. Karena uang yang didapatkan lebih besar dari Bank "*A*", maka Lina memutuskan untuk menginvestasikan uangnya di Bank "*A*".

Ayo Mengomunikasikan

Tulislah kesimpulan yang Anda dapatkan tentang apa itu bunga tunggal dan bunga majemuk serta ciri-ciri yang dapat membedakan kedua macam bunga tersebut berdasarkan konsep barisan yang digunakan. Setelah itu Anda dapat mendiskusikan kesimpulan Anda dengan siswa/kelompok lainnya. Secara santun silakan berkomentar satu sama lainnya, memberikan usul dan akhirnya menyepakati ide-ide yang paling tepat menurut kalian.

Kegiatan 2.1.2 Rumus Umum Bunga Tunggal

Dari kesimpulan aktivitas sebelumnya tentu Anda sudah dapat mengetahui permasalahan mana yang menggunakan bunga tunggal dan mana yang bunga majemuk dilihat dari besar bunga tiap tahun atau periode. Hal yang paling sederhana yang dapat diamati mengenai ciri-ciri bunga tunggal adalah besar bunga tiap periode selalu tetap, sedangkan besar bunga majemuk berubah-ubah tiap periodenya bergantung pada modal tiap awal periodenya. Perlu diperhatikan bahwa pembayaran bunga dilakukan setelah satu periode tercapai. Sebagai contoh, jika investasi dilakukan pada tanggal 16 Juni 2014 dengan bunga 8% per tahun, maka bunga akan dibayarkan sekitar tanggal 17 Juni 2015.

Pertanyaan selanjutnya yang mungkin kalian pikirkan adalah bagaimana menentukan besarnya bunga tunggal dan bunga majemuk terhadap investasi atau pinjaman setelah periode tertentu. Secara prinsip, bunga tunggal didapatkan dari modal awal dan besarnya tetap setiap tahunnya. Di lain pihak, bunga majemuk dikenakan terhadap modal yang ditambahkan dengan bunga dari periode sebelumnya.

Dalam subbagian ini akan dibahas lebih jauh mengenai bunga tunggal dan rumus umumnya. Pembahasan mengenai bunga majemuk akan diuraikan pada subbagian berikutnya. Untuk menjawab pertanyaan mengenai bunga tunggal, mari amati beberapa contoh permasalahan bunga tunggal berikut ini.

Ayo Mengamati

Contoh 2.2

Rubi menabung di koperasi pegawai yang memberikan bunga tunggal sebesar 4% per tahun. Jika Rubi menabung sebesar Rp2.000.000,00, maka hitunglah uang Rubi setelah 4 tahun menggunakan alternatif jawaban berikut ini.

Tahun	Bunga	Saldo
0		Rp2.000.000,00
1	4% dari Rp2.000.000,00 = Rp80.000,00	Rp2.080.000,00 (2.000.000 + 80.000 = 2.080.000)

Tahun	Bunga	Saldo
2	4% dari Rp2.000.000,00 = Rp80.000,00	Rp2.160.000,00 (2.080.000 + 80.000 = 2.000.000 + 2(80.000) = 2.160.000)
3	4% dari Rp2.000.000,00 = Rp80.000,00	…
4	…	…

Contoh 2.3

Pak Soni membutuhkan dana untuk merenovasi rumahnya. Beliau memutuskan meminjam uang sebesar Rp15.000.000,00 ke koperasi pegawai dengan bunga tunggal 5% per tahun. Pak Soni berencana akan melunasi pinjamannya setelah tahun kelima. Tentukan besar pinjaman Pak Soni yang harus dibayarkan pada akhir tahun ke-5 menggunakan alternatif jawaban berikut ini.

Tahun	Bunga	Pinjaman
0		Rp15.000.000,00
1	5% dari Rp15.000.000,00 = Rp750.000,00	Rp15.750.000,00 (15.000.000 + 750.000 = 15.750.000)
2	5% dari Rp15.000.000,00 = Rp750.000,00	Rp16.500.000,00 (15.750.000 + 750.000 = 15.000.000 + 2(750.000) = 16.500.000)
3	5% dari Rp15.000.000,00 = Rp750.000,00	Rp17.250.000,00 (16.500.000 + 750.000 = 15.000.000,00 + 3(750.000) = 17.250.000)
4	…	…
5	…	…

Ayo Menanya

Setelah mengamati kedua contoh sebelumnya, buatlah pertanyaan-pertanyaan mengenai bunga tunggal. Usahakan pertanyaan Anda memuat kata-kata "bunga ke-n", "saldo ke-n", "pinjaman ke-n", "barisan aritmetika".

Ayo Menggali Informasi

Berdasarkan pada pertanyaan-pertanyaan yang Anda buat sebelumnya, mungkin ada pertanyaan-pertanyaan yang Anda ajukan seperti di bawah ini.

Bagaimana menentukan bunga ke-n untuk permasalahan bunga tunggal?
Bagaimana menentukan saldo ke-n untuk permasalahan bunga tunggal?
Konsep barisan atau deret apakah yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan bunga tunggal?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, amati alternatif jawaban pada kedua tabel yang disajikan dalam Contoh 2.2 dan 2.3. Sebelum menentukan rumus umumnya, mungkin ada baiknya jika Anda mencoba menentukan saldo atau pinjaman pada tahun tertentu, misalnya pada tahun ke-10. Buatlah dugaan sementara mengenai rumus umum bunga tunggal. Gunakan buku referensi lain, internet, atau sumber lainnya yang dapat mendukung dugaan sementara Anda.

Ayo Menalar

Untuk lebih menguatkan hasil pengamatan Anda, berikut disajikan permasalahan lainnya.

Contoh 2.4

Sofi menabung uang hasil kerja sambilan sebesar Rp2.000.000,00 di bank yang menawarkan bunga tunggal 8% per tahun. Jika Sofi tidak pernah mengambil uangnya selama 4 tahun, maka besar saldo yang dimiliki Sofi dapat dihitung dengan melengkapi tabel berikut ini.

Tahun	Bunga	Saldo
0	0	Rp2.000.000,00
1	8% dari 2.000.000 = ...	Rp... (2.000.000 + … = …)
2	…	Rp... (2.000.000 + … +… = 2.000.000 + 2(…) = …)
3	…	Rp... (2.000.000 + … + … + … = 2.000.000 + 3(…) = …)
4	…	Rp... (2.000.000 + … +… + … + … = 2.000.000 + 4(…) = …)

Dapatkah Anda menghitung total saldo tabungan Sofi pada akhir tahun ke-10? Dengan menggunakan konsep barisan aritmetika, besar saldo tabungan Sofi setelah tahun ke-10 adalah ….

Dengan pola yang sama untuk mencari saldo tahun ke-10, Anda juga dapat menghitung total saldo untuk tahun-tahun lainnya.

Selanjutnya, jika diperhatikan pola penambahan bunga setiap tahunnya maka total bunga pada akhir tahun ke-n adalah

2.000.000,00 × 8% × n = ...

Dengan demikian total saldo yang akan diterima Sofi pada tahun ke-n adalah

$2.000.000 + (2.000.000 \times 8\% \times n)$

$= 2.000.000\ (1 + (8\% \times n))$

$=\ldots$

Berikut diberikan contoh lainnya tentang bunga tunggal. Anda dapat menyelesaikan soal berikut dengan cara yang serupa dengan contoh sebelumnya atau dengan cara lainnya yang Anda kuasai.

Contoh 2.5

Susi ingin membeli laptop edisi terbaru dengan harga Rp8.000.000,00. Untuk itu, dia meminjam uang seharga laptop tersebut dengan bunga tunggal 6%. Jika Susi ingin melunasi pinjaman tersebut setelah tahun keempat, tentukan

1. total pinjaman Susi pada akhir tahun ke-4,
2. total pinjaman Susi pada akhir tahun ke-7,
3. total bunga pada akhir tahun ke-n,
4. total pinjaman Susi pada akhir tahun ke-n.

Jika modal awal tabungan atau pinjaman dilambangkan oleh M, suku bunga per tahun yang ditawarkan dilambangkan oleh r, dan lamanya tabungan atau pinjaman adalah n tahun, maka untuk menentukan rumus umum bunga tunggal tahun ke-n, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Berapakah besar bunga tiap tahunnya?
2. Berapakah total bunga pada akhir tahun ke-n?
3. Berapakah total saldo atau pinjaman pada akhir tahun ke-n?
4. Konsep barisan apakah yang dapat digunakan dalam menghitung bunga tunggal?

Tuliskan jawaban-jawaban Anda dalam kotak yang tersedia di bawah ini.

Sistem pembayaran bunga pada simpanan ataupun pinjaman juga dapat dibayarkan lebih dari satu kali dalam satu tahun. Sebagai contoh, suku bunganya sebesar 10% per tahun, tetapi bunga yang dibayarkan setiap 4 bulan sekali. Perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 2.6

Sofi menabung uangnya sebesar Rp2.000.000,00 dengan bunga tunggal 8% per tahun. Jika bunga akan dibayarkan setiap 3 bulan sekali, maka tentukan:

1. bunga yang dibayarkan setiap periode,
2. total saldo pada akhir tahun ke-4,
3. total saldo pada akhir bulan ke-57,
4. total saldo pada akhir tahun ke-n.

Perhatikan bahwa bunga yang akan didapatkan Sofi per tahun adalah
8% dari 2.000.000 = 160.000.

a. Jika bunga dibayarkan setiap 3 bulan sekali, maka bunga akan dibayarkan sebanyak 4 kali dalam satu tahun (mengapa?).

   Dengan demikian bunga yang dibayarkan setiap periode adalah sebesar

   $$\frac{1}{4} \times 160.000 = ...$$

b. Karena terdapat 4 periode pembayaran bunga dalam satu tahun, maka terdapat 16 periode pembayaran bunga dalam 4 tahun (mengapa?) sehingga total bunga pada akhir tahun ke-4 adalah

$$16 \times \frac{1}{4} \times 160.000 = ...$$

Jadi, saldo tabungan pada akhir tahun ke-4 adalah

$$2.000.000 + (16 \times \frac{1}{4} \times 160.000)$$

$$= 2.000.000 + (16 \times \frac{1}{4} \times 8\% \times 2.000.000)$$

$$= 2.000.000\ (1 + (16 \times \frac{1}{4} \times 8\%))$$

$$= ...$$

c. Pada akhir bulan ke-57, terdapat 19 periode pembayaran bunga (mengapa?), sehingga saldo tabungannya menjadi

$$2.000.000 + (19 \times \frac{1}{4} \times 160.000)$$

$$= 2.000.000\ (1 + (19 \times \frac{1}{4} \times 8\%))$$

$$= ...$$

d. Pada akhir tahun ke-n, terdapat $4n$ kali pembayaran bunga (mengapa?), sehingga total bunga pada akhir tahun ke-n adalah

$$4n \times \frac{1}{4} \times 160.000 = ...$$

Jadi, saldo tabungan pada akhir tahun ke-n adalah

$$2.000.000 + (4n \times \frac{1}{4} \times 160.000)$$

$$= 2.000.000\ (1 + (4n \times \frac{1}{4} \times 8\%))$$

$$= ...$$

Dengan menggunakan cara yang serupa dengan penyelesaian contoh di atas atau dengan cara lainnya yang Anda kuasai, coba selesaikan permasalahan berikut pada kotak yang sudah disediakan.

Contoh 2.7

Ali menabung di bank sebesar Rp5.000.000,00 dengan bunga 7% yang dibayarkan setiap bulan. Tentukan saldo tabunganya pada akhir bulan ke-30 dan tentukan pula saldo tabungannya pada akhir tahun ke-n.

Perhatikan Contoh 2.6 dan Contoh 2.7. Jika modal awal dilambangkan dengan M, bunga tunggal yang ditawarkan adalah r per tahun, tetapi bunga dibayarkan sebanyak k kali dalam setahun, maka tuliskanlah rumus umum saldo tabungan setelah t periode.

Ayo Mengomunikasikan

Tulislah kesimpulan yang Anda dapatkan dari kegiatan di atas di dalam kotak yang sudah disediakan. Diskusikan dengan teman atau kelompok lainnya dengan santun mengenai kesimpulan yang sudah dibuat.

Latihan 2.1.2

1. Jika Budi menabung uangnya yang sebesar Rp3.000.000,00 di bank dengan bunga tunggal yang ditawarkan sebesar 6%, maka tentukan total saldo tabungannya pada akhir tahun ke-6.
2. Hana menabung uangnya sebesar Rp500.000,00 dengan bunga tunggal 5,5% yang dibayarkan setiap 6 bulan sekali. Berapakah saldo tabungan Hana jika dia mengambil uangnya setelah 42 bulan?
3. Berapakah total saldo yang diterima dalam waktu 30 bulan jika Adi menabung uangnya sebesar Rp8.000.000,00 dengan bunga 4% per tahun?
4. Jika Santi menabung sebesar Rp5.000.000,00, dia mendapat bunga sebesar Rp93.750,00 dalam waktu 9 bulan. Tentukan suku bunga tunggal per tahun yang ditawarkan.
5. Pak Juni meminjam uang sebesar Rp12.000.000,00 di sebuah BPR dengan bunga tunggal 6,5% per tahun. Tentukan lama pinjaman Pak Juni jika beliau mengembalikan uang pinjaman tersebut sebesar Rp15.900.000,00.

Pengayaan

6. Berapa tahun yang dibutuhkan Abi untuk mendapatkan saldo dua kali lipat jika ia menabung sebesar Rp3.000.000,00 dengan bunga tunggal 5% per tahun?
7. Dita meminjam uang di dua BPR yang berbeda dengan masa pinjaman keduanya adalah 3 tahun. Total bunga tunggal dari kedua BPR yang harus ia bayarkan adalah Rp1.125.000,00. Dita meminjam uang sebesar Rp5.000.000,00 pada BPR A dengan bunga tunggal 3.5%. Sedangkan BPR B menawarkan bunga tunggal 4% per tahun.

   Tentukan besar pinjaman Dita pada BPR B.

Kegiatan 2.1.3 Rumus Umum Bunga Majemuk

Setelah mengetahui rumus umum tahun ke-n untuk bunga tunggal, pertanyaan selanjutnya yang harus dijawab adalah bagaimana menentukan rumus umum tahun ke-n untuk bunga majemuk. Perlu diingat bahwa untuk menentukan bunga tunggal tiap tahun, modal yang dikalikan dengan prosentase bunga adalah modal awal. Sedangkan pada bunga majemuk, bunga yang didapatkan di setiap tahunnya ditambahkan ke modal sebelumnya untuk mendapatkan modal yang baru. Sehingga bunga di tahun berikutnya merupakan hasil kali dari suku bunga dengan modal yang baru. Hal ini yang mengakibatkan bunga majemuk tiap tahunnya berubah-ubah.

Untuk mengetahui lebih dalam mengenai bunga majemuk, amati permasalahan-permasalahan berikut.

Contoh 2.8

Joko menabungkan uangnya sebesar Rp2.000.000,00 di bank dengan bunga majemuk 4%. Besar saldo Joko pada akhir tahun ke-4 disajikan dalam alternatif penyelesaian berikut.

Tahun	Bunga	Saldo
0		Rp2.000.000,00
1	4% dari Rp2.000.000,00 = Rp80.000,00	Rp2.080.000,00 (2.000.000 + 80.000 = 2.080.000)
2	4% dari Rp2.080.000,00 = Rp83.200,00	Rp2.163.200,00 (2.080.000 + 83.200 = 2.163.200)
3	4% dari Rp2.163.200,00 = Rp86.528,00	…
4	…	…

Contoh 2.9

Tika meminjam uang di bank yang menawarkan bunga majemuk 5% dengan besar pinjaman Rp15.000.000,00 selama 5 tahun. Tika harus mengembalikan pinjamannya sebesar Rp19.144.223,54 dengan rincian sebagai berikut.

Tahun	Bunga	Pinjaman
0		Rp15.000.000,00
1	5% dari Rp15.000.000,00 = Rp750.000,00	Rp15.750.000,00 (15.000.000 + 750.000 = 15.750.000)
2	5% dari Rp15.750.000,00 = Rp787.500,00	Rp16.537.500,00 (15.750.000 + 787.500 = 16.537.500)
3	…	…
4	5% dari Rp17.364.375,00 = …	…
5	…	…

Ayo Menanya

Setelah mengamati kedua contoh bunga majemuk di atas, coba buat pertanyaan-pertanyaan mengenai bunga majemuk. Usahakan pertanyaan Anda memuat kata-kata “saldo ke-n”, “bunga ke-n”, “rumus umum”, “barisan geometri”.

Ayo Menggali Informasi

Dari pertanyaan-pertanyaan sebelumnya, mungkin pertanyaan Anda diantaranya adalah

a. Bagaimana menentukan bunga majemuk pada akhir tahun tahun ke-n?
b. Bagaimana menentukan total bunga majemuk pada akhir tahun ke-n?
c. Bagaimana menentukan total saldo atau pinjaman pada akhir tahun ke-n?
d. Konsep barisan atau deret apakah yang bisa digunakan untuk menghitung bunga majemuk?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan di atas, mungkin ada baiknya jika Anda coba tentukan saldo tabungan pada akhir tahun tertentu, akhir tahun ke-10 misalnya. Kemudian carilah bentuk yang mirip dari setiap tahunnya. Dengan demikian Anda dapat menentukan saldo tahun ke-n dengan lebih mudah.

Buatlah dugaan sementara mengenai rumus umum bunga majemuk dari pengamatan Anda. Gunakan buku referensi lain, internet atau sumber lainnya untuk mendukung dugaan sementara Anda.

Ayo Menalar

Untuk lebih menguatkan kesimpulan sementara yang Anda buat, amati contoh berikut ini.

Contoh 2.10

Pak Purba menyimpan uang di Bank sebesar Rp10.000.000,00 dengan bunga majemuk 3%. Besar tabungan Pak Purba di akhir tahun ke-4 dapat kita hitung dengan uraian sebagai berikut.

Bunga akhir tahun 1 : 3% dari 10.000.000 = 300.000
Saldo akhir tahun 1:

$$\begin{aligned}&10.000.000 + 300.000\\&= 10.000.000 + (10.000.000 \times 3\%)\\&= 10.000.000 + (1 + 0,03)\\&= 10.300.000\end{aligned}$$

Jadi saldo akhir tahun ke 1 adalah Rp10.300.000,00.

Bunga akhir tahun 2 : 3% dari 10.300.000 = 309.000

Saldo akhir tahun 2 :

$$
\begin{aligned}
& 10.000.000 + 300.000 + 309.000 \\
&= 10.000.000 + (1 + 0{,}03) + 309.000 \\
&= 10.000.000 + (1 + 0{,}03) + 10.000.000\ (1 + 0{,}03) \times 0{,}03) \\
&= 10.000.000\ (1 + 0{,}03)\ (1 + 0{,}03) \\
&= 10.000.000\ (1 + 0{,}03)^2 \\
&= 10.609.000
\end{aligned}
$$

Jadi saldo akhir tahun 2 adalah Rp10.605.000,00

Bunga akhir tahun 3 : 3% dari 10.609.000 = 318.270

Saldo akhir tahun 3 :

$$
\begin{aligned}
& 10.000.000 + 300.000 + 309.000 + 318.270 \\
&= 10.000.000\ + (1 + 0{,}03)^{\cdots} + 318.270 \\
&= 10.000.000 + (1 + 0{,}03)^{\cdots} + 10.000.000\ (1 + 0{,}03)^{\cdots} \times 0{,}03) \\
&= 10.000.000\ (1 + 0{,}03)^{\cdots} \times (1 + 0{,}03) \\
&= 10.000.000\ (1 + 0{,}03)^{\cdots} \\
&= 10.927.270
\end{aligned}
$$

Jadi saldo akhir tahun 3 adalah Rp10.927.270,00

Bunga akhir tahun 4 : 3% dari ... = ...

Saldo akhir tahun 4 : ...

Dengan demikian, besar saldo tabungan Pak Purba di akhir tahun keempat adalah …

Dengan cara yang sama, dapatkah Anda menghitung saldo tabungan beliau jika tidak mengambil uangnya selama 8 tahun?

Total saldo yang dimiliki Pak Purba di akhir tahun ke-8 adalah sebesar …

Lalu bagaimana dengan total saldo yang dimiliki pada akhir tahun ke-20?

Jika diperhatikan pola saldo setiap akhir tahunnya, maka saldo Pak Purba pada akhir tahun ke-n adalah …

Untuk lebih memperjelas cara menyelesaikan permasalahan bunga majemuk, berikut diberikan contoh lainnya. Coba Anda selesaikan permasalahan berikut dengan cermat.

Contoh 2.11

Andi menyimpan uang sebesar Rp4.000.000,00 di bank dengan bunga 4% per tahun. Tentukanlah:

a. bunga yang diterima Andi pada akhir tahun ke-4,
b. saldo akhir tahun ke-4,
c. saldo yang dimiliki Andi pada akhir tahun ke-15,
d. saldo yang dimiliki Andi pada akhir tahun ke-n.

Jika *modal awal* simpanan atau pinjaman dilambangkan dengan M, suku bunga majemuk per tahun dilambangkan dengan r, dan waktu simpanan atau pinjaman selama n tahun, maka untuk menentukan rumus umum bunga majemuk tahun ke-n, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

a. Bagaimana cara menghitung bunga majemuk setiap tahunnya?
b. Berapakah total bunga majemuk pada akhir tahun ke-n?
c. Berapakah total saldo pada akhir tahun ke-n?
d. Konsep barisan apakah yang digunakan untuk menghitung saldo setiap tahun dengan bunga majemuk?

Seperti halnya bunga tunggal, bunga majemuk juga dapat dibayarkan beberapa kali dalam setahun. Untuk bunga majemuk yang dibayarkan lebih dari satu kali dalam satu tahun, perhatikan permasalahan berikut.

Contoh 2.12

Lia menabung uangnya sebesar Rp5.000.000,00 di suatu bank yang memberikan bunga 3% per tahun yang dibayarkan setiap 6 bulan sekali. Besar saldo tabungan Lia setelah 3 tahun dapat dihitung sebagai berikut.

Tahun 1

a. **Periode 1 (6 bulan pertama)**

Bunga : $\frac{3}{2}$% dari 5.000.000 = 75.000

Tahukah Anda mengapa suku bunganya dibagi dengan 2?

Saldo :

$5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)$

$= 5.075.000$

Jadi saldo periode 1 (6 bulan pertama) adalah Rp5.075.000,00

b. **Periode 2 (6 bulan kedua)**

Bunga : $\frac{3}{2}$% dari 5.075.000 = 76.125

Saldo :

$5.075.000 + 76.125$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%) + (\frac{3}{2}\% \times (5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)))$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)(1 + \frac{3}{2}\%)$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^2$

$= 5.151.125$

Jadi saldo periode 2 (6 bulan kedua) adalah Rp5.151.125,00

Tahun 2

a. **Periode 3 (6 bulan ketiga)**

Bunga : $\frac{3}{2}$% dari 5.151.125 = ...

Saldo :

5.151.125 + ...

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^2 + (\frac{3}{2}\% \times (5.000.000(1 + \frac{3}{2}\%)^2))$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^2(...)$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}$

= 5.228.391,88

Jadi saldo periode 3 (6 bulan ketiga) adalah Rp5.228.391,88 ,00

b. Periode 4 (6 bulan keempat)

Bunga : $\frac{3}{2}$ % dari 5.228.391,88 = ...

Saldo :

5.228.391,88 + ...

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...} + (\frac{3}{2}\% \times (5.000.000(1 + \frac{3}{2}\%)^{...}))$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}(...)$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}$

= 5.306.817,76

Jadi saldo periode 4 (6 bulan keempat) adalah Rp5.306.817,76

Tahun 3

a. Periode 5 (6 bulan kelima)

Bunga : $\frac{3}{2}$ % dari 5.306.817,76 = ...

Saldo :

5.306.817,76 + ...

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...} + (\frac{3}{2}\% \times (5.000.000(1 + \frac{3}{2}\%)^4))$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}(...)$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}$

$= 5.386.420{,}03$

Jadi saldo periode 5 (6 bulan kelima) adalah Rp5.386.420,03

b. Periode 6 (6 bulan keenam)

Bunga : $\frac{3}{2}\%$ dari 5.386.420,03 = ...

Saldo :

5.386.420,03 + ...

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...} + (\frac{3}{2}\% \times (5.000.000(1 + \frac{3}{2}\%)^{...}))$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}(...)$

$= 5.000.000\ (1 + \frac{3}{2}\%)^{...}$

$= 5.467.216{,}33$

Jadi saldo periode 6 (6 bulan keenam) adalah Rp5.467.216,33

Jika diamati lebih teliti mengenai saldo di setiap periode, tentukan total saldo di akhir periode ke-20.

Tentukan pula total saldo yang dimiliki Lia pada akhir tahun ke-20. Apakah sama dengan saldo di akhir periode ke-20?

Selanjutnya, tentukan saldo di tabungan Lia pada akhir tahun ke-*n*.

Dengan mengamati contoh dan penyelesaiannya di atas, coba Anda selesaikan permasalahan berikut dengan cara yang serupa atau cara lain yang Anda kuasai.

Contoh 2.13

Anto meminjam uang sebesar Rp6.000.000,00 dengan bunga majemuk 8% per tahun yang dibayarkan setiap 3 bulan. Tentukan besar total pinjaman Anto selama 2 tahun jika ia tidak pernah mencicil pinjamannya selama masa tersebut.

Jika simpanan dengan bunga majemuk dibayarkan sebanyak k kali dalam setahun dengan bunga r per tahun dan modal awal P, maka dapatkah Anda menghitung besarnya saldo akhir tahun ke-n?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

a. Berapakah bunga yang diterima pada tahun ke-n?

b. Berapakah saldo yang dimiliki pada tahun ke-n?

Ayo Mengomunikasikan

Tulislah kesimpulan yang Anda dapatkan dari kegiatan di atas di dalam kotak yang sudah disediakan. Kemudian, diskusikan dengan teman atau kelompok lainnya dengan santun mengenai kesimpulan yang sudah dibuat.

Latihan 2.1.3

1. Suatu modal sebesar Rp10.000.000,00 diinvestasikan selama 2 tahun dengan bunga sebesar 10%. Tentukan besar modal jika modal dibungakan majemuk

   a. tahunan b. setiap setengah tahun c. setiap 3 bulan
   d. setiap bulan e. setiap hari f. setiap jam

2. Suatu modal sebesar Rp1.000.000,00 diinvestasikan dengan bunga 8%. Tentukan besar modal di akhir tahun ketiga jika modal diinvestasikan dengan bunga majemuk

   a. tahunan, b. setiap tiga bulan, c. harian.

3. Suatu modal sebesar Rp5.000.000,00 dibungakan majemuk 4% pertahun. Tentukan besar modal setelah 14,5 tahun.

4. Pak Ali menabung Rp1.000.000,00 di suatu bank dengan bunga tunggal sebesar 4% per tahun. Pak Budi juga menabung Rp1.000.000,00 di bank yang sama dengan bunga majemuk 4% per tahun. Setelah 5 tahun, tabungan siapakah yang lebih banyak?

5. Setiap awal tahun Pak Amir menabung sebesar Rp1.000.000,00 di bank yang memberikan bunga majemuk sebesar 4% per tahun. Pada awal tahun keenam, Pak Budi juga menabung sebesar Rp1.000.0000,00 di bank yang sama dan besar bunga majemuk yang sama. Tentukan selisih tabungan Pak Amir dan Pak Budi di akhir tahun ke sepuluh.

Pengayaan

6. Pak Ali menabung Rp1.000.000,00 di suatu bank dengan dibungakan secara majemuk sebesar 4% setiap 6 bulan. Pada saat yang sama, Pak Budi juga menabung Rp1.000.000,00 di bank yang sama dan dibungakan secara majemuk setiap tahun. Tentukan besar bunga yang akan diberikan kepada Pak Budi sehingga tabungan mereka sama besar di akhir tahun ke 5.

7. Suatu modal sebesar Rp1.000.000,00 dibungakan majemuk 4% setiap tahun. Suatu modal lain juga sebesar Rp1.000.000,00 dibungakan majemuk p% setiap 3 bulan. Tentukan nilai p supaya kedua modal tersebut sama di akhir tahun pertama.
8. Pak Ali mempunyai modal sebesar Rp50.000.000,00 . Modal tersebut dipisahkan menjadi 2 tabungan yaitu tabungan A dan tabungan B yang masing-masing dibungakan majemuk dengan bunga 10% per tahun. Tabungan A dan B masing-masing diinvestasikan selama 5 tahun dan 8 tahun. Ternyata hasil investasi tabungan A dan B sama besar. Tentukan besar masing-masing tabungan A dan B di awal investasi.

Proyek

Kegiatan

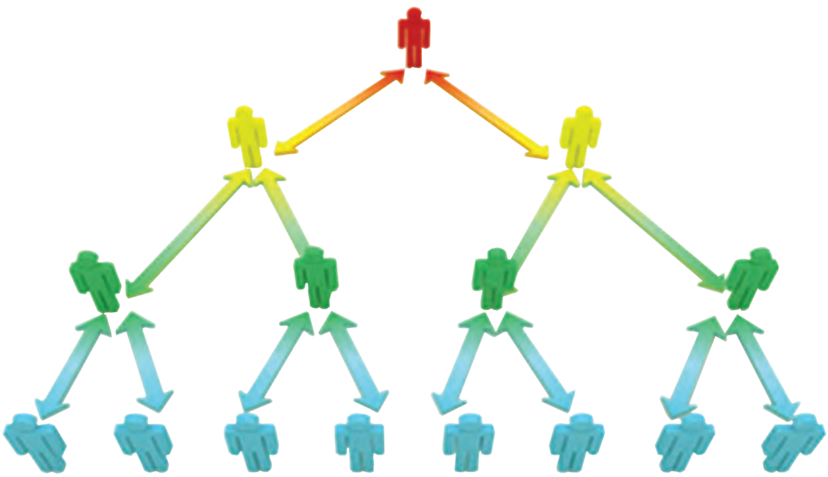
Sepasang suami istri melakukan pengamatan bahwa biaya pendidikan di universitas pada saat ini adalah Rp30.000.000,00 dan setiap tahun mengalami kenaikan sebesar 10% dari tahun sebelumnya. Suami istri tersebut ingin menabung setiap tahun selama 15 tahun mulai tahun ini untuk biaya pendidikan anak mereka kelak di universitas. Setiap tahun mereka ingin menabung sebesar M di bank dan memperoleh bunga majemuk tahunan sebesar r%. Tentukanlah nilai M dan r sehingga hasil tabungan suami istri tersebut melebihi biaya pendidikan 15 tahun kemudian. (Jawaban dapat lebih dari 1).

Subbab 2.2 Pertumbuhan dan Peluruhan

Kegiatan 2.2.1 Mengenal Pertumbuhan dan Peluruhan

Sistem Pemasaran

Pernahkah Anda mendengar sistem pemasaran dengan model *multilevel marketing*? Sistem pemasaran tersebut diilustrasikan pada skema pada Gambar 1.



Sumber: Perludiketahui.wordpress.com

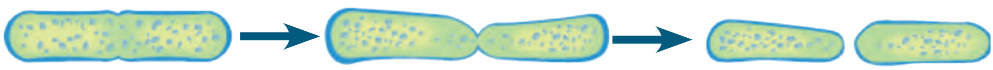
Gambar 1. Sistem Pemasaran

Skema pada Gambar 1 menunjukkan bahwa setiap anggota harus merekrut dua anggota. Misalkan Anda berhasil merekrut dua anggota, maka kedua anggota tersebut berada pada tingkat 1. Selanjutnya jika kedua anggota pada tingkat 1 masing-masing berhasil merekrut dua anggota, maka keempat anggota dari tingkat 1 berada pada tingkat 2 dan anggota yang Anda memiliki sebanyak 6 orang. Selanjutnya, jika keempat anggota pada level 2 masing-masing merekrut 2 anggota, maka anggota pada tingkat 3 sebanyak 8 orang dan anggota Anda mencapai 14 orang. Tentunya Anda bisa menghitung banyak anggota yang Anda miliki jika tingkat Anda semakin tinggi.

Ayo Mengamati

Contoh 2.14

Model serupa juga terjadi pada pertumbuhan organisme. Misalkan hasil pengamatan pada suatu laboratorium mengenai pertumbuhan bakteri diilustrasikan pada gambar 2.



Gambar 2. Pembelahan Bakteri *Sumber: Core-Plus Mathematics Course 1*

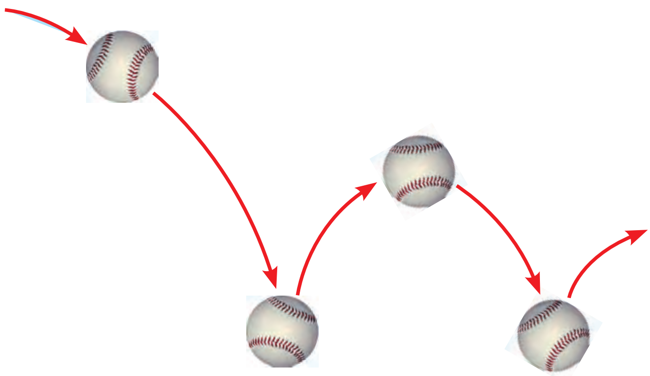
Berdasarkan Gambar 2. tampak bahwa satu bakteri dapat membelah menjadi dua bakteri dan untuk membelah diri dibutuhkan waktu 1 jam. Dengan kata lain dari satu bakteri setelah 1 jam akan diperoleh dua bakteri. Selanjutnya, jika setiap bakteri dapat membelah diri menjadi dua bakteri baru, maka setelah 2 jam akan diperoleh empat bakteri. Hitunglah banyak bakteri jika waktu terus bertambah. Buat dugaan kecenderungan banyak bakteri jika waktu terus bertambah. Dukung dugaan yang Anda buat dengan melengkapi tabel berikut.

Waktu (jam)	Banyak bakteri hasil membelah diri
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
4	
5	
$\vdots$	
15	
24	
48	

Apa yang dapat Anda simpulkan mengenai nilai yang diperoleh dari tabel di atas? Amati apakah banyak bakteri hasil membelah diri bertambah atau berkurang seiring bertambahnya waktu?

Contoh 2.15

Pernahkah Anda memantulkan bola pingpong? Jika Anda pantulkan maka bola itu akan memantul berulang-ulang sebelum berhenti. Ketinggian tiap-tiap pantulan akan lebih rendah daripada pantulan sebelumnya, seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. Pantulan Bola *Sumber: Core-Plus Mathematics Course 1*

Andaikan sebuah bola pingpong dijatuhkan dari ketinggian 5 meter dan akan memantul kembali sejauh $\frac{4}{5}$ dari ketinggian sebelumnya. Tentukan ketinggian setelah pantulan ke-3, setelah pantulan ke-4, dan seterusnya. Buat dugaan kecenderungan tinggi pantulan yang dihasilkan. Dukung dugaan yang Anda buat dengan melengkapi tabel berikut.

Pantulan ke-	Tinggi bola yang dicapai (dalam meter)
1	$4 = \left(\frac{4}{5}\right)^1 (5)$
2	$\frac{16}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)(4) = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}(5)\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 (5)$

3	$\frac{64}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{16}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\left(\frac{4}{5}\right)^2 (5)\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 (5)$
4	
5	
⋮	
10	
15	
20	

Apa yang dapat Anda simpulkan mengenai nilai yang diperoleh dari tabel di atas? Coba Anda amati apakah tinggi pantulan bola bertambah atau berkurang seiring bertambahnya pantulan?

Berdasarkan kedua masalah di atas, masalah 1 mengenai pembelahan bakteri merupakan masalah pertumbuhan. Sedangkan masalah 2 mengenai benda jatuh merupakan masalah peluruhan.

Ayo Menanya

Setelah Anda mengamati kedua masalah di atas, tentunya Anda ingin tahu tentang ciri dari masalah pertumbuhan dan peluruhan. Sekarang, coba Anda buat pertanyaan terkait ciri masalah pertumbuhan dan peluruhan. Upayakan pertanyaan yang Anda buat memuat kata-kata “bertambah”, “berkurang”, “barisan”, “pertumbuhan”, dan “peluruhan”. Tuliskan pertanyaan Anda pada tempat yang disediakan berikut.

Ayo Menggali Informasi

Dari pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Apa ciri masalah pertumbuhan dan peluruhan?
2. Bagaimana cara menghitung nilai ke-*n* pada masalah pertumbuhan dan peluruhan?
3. Konsep barisan apa yang digunakan pada masalah pertumbuhan dan peluruhan?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut Anda harus mengkaitkan bertambahnya nilai atau berkurangnya nilai dengan pertumbuhan atau peluruhan. Kaitkan pula pertambahan nilai atau pengurangan nilai tersebut dengan konsep barisan yang telah Anda pelajari. Apakah terkait dengan barisan aritmatika atau barisan geometri?

Ingat kembali pada Contoh 2.14 mengenai pembelahan bakteri yang merupakan pertumbuhan dan Contoh 2.15 mengenai pantulan bola yang merupakan peluruhan. Selanjutnya, amati kecenderungan nilai pada Contoh 2.14 dan 2.15 tersebut. Contoh mana yang nilainya bertambah dan contoh mana yang nilainya berkurang? Kaitkan bertambahnya nilai atau berkurangnya nilai dengan pertumbuhan atau peluruhan. Carilah beberapa contoh masalah yang terkait dengan pertumbuhan dan peluruhan dari buku referensi matematika atau dari internet guna menguatkan dugaan Anda. Contoh-contoh masalah itu dapat berupa soal UAN, soal ujian masuk perguruan tinggi, atau soal olimpiade.

Ayo Menalar

Berikut diberikan beberapa masalah terkait pertumbuhan dan peluruhan.

Masalah Pertumbuhan

1. Hasil sensus penduduk pada tahun 2009 mencatat bahwa banyak penduduk suatu kota sebanyak 50.000 orang. Banyak penduduk ini meningkat dari tahun ke tahun. Peningkatan banyak penduduk dari tahun 2009 hingga tahun 2014 yang disajikan pada tabel berikut.

Tahun	Banyak Penduduk (orang)
2009	50.000
2010	55.000
2011	60.500
2012	66.550
2013	73.205
2014	80.525

2. Pak Budi membeli sebidang tanah seluas 200 m^2 seharga Rp. 200.000.000 pada tahun 2010. Pada tahun 2015 Pak Budi ingin menjual tahan tersebut. Seiring berjalannya waktu harga tanah naik 25% setiap tahun. Harga tanah dari tahun 2010-2015 diberikan pada tabel berikut.

Tahun	Harga Tanah (Rp)
2010	200.000.000
2011	250.000.000
2012	312.500.000
2013	390.625.000
2014	488.281.250
2015	610.351.563

Masalah Peluruhan

3. Suatu bahan radioaktif yang semula berukuran 60 gram mengalami reaksi kimia sehingga ukurannya menyusut. Waktu penyusutan dan ukuran bahan radioktif dari waktu ke waktu disajikan pada tabel berikut.

Waktu (jam)	Ukuran Bahan Radioaktif (gram)
0	60
12	54
24	48,6
36	43,74
48	39,366
60	35,4394

4. Penisilin digunakan mengurangi penyebaran bakteri pada kasus infeksi. Pada suatu kasus infeksi seorang dokter memberikan dosis penisilin yang dapat membunuh 10% bakteri setiap 5 jam. Hasil diagnosa awal menunjukkan terdapat 500.000 bakteri yang menginfeksi seorang pasien. Hasil uji laboratorium mengenai penurunan penyebaran bakteri diberikan pada tabel berikut.

Waktu (jam)	Banyak Bakteri
0	500.000
5	450.000
10	405.000
15	364.500
20	328.050
25	295.245

Berdasarkan masalah yang diberikan, identifikasi ciri masalah yang merupakan perumbuhan dan masalah yang merupakan peluruhan. Dari ciri yang telah Anda identifikasi, tentukan masalah berikut merupakan masalah pertumbuhan atau masalah peluruhan, sertai pula penjelasannya.

Masalah Pertumbuhan dan Peluruhan

1. Suatu perusahaan pakan ternak dapat menghasilkan 400 kw pada awal produksi di tahun pertama. Selanjutnya perusahaan tersebut setiap tahun men targetkan kenaikan produksi 10% dari tahun sebelumnya.

2. Sebuah industri rumah tangga yang baru beroperasi tahun 2012 membeli mesin produksi seharga Rp100.000.000. Dengan berjalannya proses produksi, maka harga mesin menurun 1% setiap tahun.

Ayo Mengomunikasikan

Buatlah simpulan yang Anda dapatkan tentang ciri yang membedakan masalah pertumbuhan dan peluruhan. Diskusikan hasil yang Anda temukan dengan teman sekelompok, kemudian tukar dengan kelompok lain dan beri komentar terhadap hasil kelompok lain. Tuliskan hasil diskusi pada tempat yang disediakan berikut.

Kegiatan 2.2.2 Menentukan Rumus Pertumbuhan dan Peluruhan

Setelah Anda dapat mengidenfikasi ciri masalah pertumbuhan dan masalah peluruhan, Anda telah dapat menentukan bilamana suatu masalah merupakan masalah pertumbuhan dan bilamana merupakan masalah peluruhan. Selanjutnya, bagaimana Anda dapat menentukan nilai ke-n pada masalah pertumbuhan dan peluruhan?

Ingat kembali Contoh 2.14 tentang pembelahan bakteri, perhatikan tabel terkait banyak bakteri hasil membelah diri. Apakah Anda dapat menduga pola untuk menentukan banyak bakteri hasil membelah diri pada waktu ke-n? Jika Anda dapat menemukan pola ini maka Anda dapat menentukan banyak bakteri hasil pembelahan tanpa harus mendaftar banyak bakteri setiap satuan waktu. Bayangkan jika Anda harus mendaftar banyak bakteri setiap satuan waktu, tentunya hal ini tidak praktis terutama untuk satuan waktu yang besar. Demikian pula pada Contoh 2.15 mengenai pantulan bola, perhatikan tabel terkait tinggi bola yang dicapai. Tampak ada suatu pola yang terbentuk.

Dengan demikian Anda dapat menentukan tinggi bola yang dicapai setelah pantulan ke-n tanpa mendaftar tinggi bila yang dicapai sebelumnya.

Dalam hal ini, untuk mendapat nilai ke-n pada masalah pertumbuhan dan peluruhan akan terkait dengan nilai sebelumnya, yaitu nilai ke $n-1$. Pada sub bagian ini kita akan membahas rumus untuk menentukan nilai ke-n tersebut. Oleh karenanya, Anda perlu mengingat kembali konsep barisan yang telah Anda pelajari sebelumnya.

Ayo Mengamati

Contoh 2.16

Banyak penduduk suatu kota setiap tahun meningkat sekitar 1% dari banyak penduduk tahun sebelumnya. Berdasarkan sensus penduduk pada tahun 2009, penduduk di kota tersebut berbanyak 100.000 orang. Hitung banyak penduduk pada tahun 2010 hingga tahun 2014 dengan melengkapi tabel berikut.

Tahun	Banyak Penduduk (orang)
2010	$100.000+\frac{1}{100}(100.000)=100.000\left(1+\frac{1}{100}\right)$ $=100.000(1,01)=101.000$
2011	$101.000+\frac{1}{100}(101.000)=101.000\left(1+\frac{1}{100}\right)$ $=101.000(1,01)=102.010$
2012	$102.010+\frac{1}{100}(102.010)=102.010\left(1+\frac{1}{100}\right)$ $=102.010(1,01)=103.030$
2013	
2014	

Masalah di atas merupakan masalah ***pertumbuhan***. Beri alasan mengapa masalah tersebut merupakan masalah pertumbuhan. Amati pola yang terbentuk pada banyak penduduk selama lima tahun tersebut. Dugalah pola pertambahan banyak penduduk yang terjadi.

Contoh 2.17

Ketika sedang memeriksa seorang bayi yang menderita infeksi telinga, dokter mendiagnosis bahwa mungkin terdapat 1.000.000 bakteri yang menginfeksi. Selanjutnya pemberian penisilin yang diresepkan dokter dapat membunuh 5% bakteri setiap 4 jam. Coba Anda hitung banyak bakteri pada 24 jam pertama dengan melengkapi tabel berikut.

Waktu (jam)	Banyak Bakteri
4	$1.000.000-\frac{5}{100}(1.000.000)=1.000.000\left(1-\frac{5}{100}\right)$ $=1.000.000(0,95)=950.000$
8	$950.000-\frac{5}{100}(950.000)=950.000\left(1-\frac{5}{100}\right)$ $=950.000(0,95)=902.500$
12	$902.500-\frac{5}{100}(902.500)=902.500\left(1-\frac{5}{100}\right)$ $=902.500(0,95)=857.375$
16	
20	
24	

Masalah di atas merupakan masalah ***peluruhan***. Beri alasan mengapa masalah tersebut merupakan masalah peluruhan. Amati pola yang terbentuk pada banyak bakteri pada 24 jam pertama tersebut. Dugalah pola pengurangan banyak bakteri yang terjadi.

Ayo Menanya

Setelah Anda mengamati kedua masalah di atas, tentunya Anda ingin tahu pola umum tentang masalah pertumbuhan dan peluruhan. Sekarang, coba Anda buat pertanyaan terkait rumus nilai ke-n pada masalah pertumbuhan dan peluruhan! Upayakan pertanyaan yang Anda buat memuat kata-kata "pertumbuhan", "peluruhan", "rumus umum" dan "nilai ke-n". Tuliskan pertanyaan Anda pada tempat yang disediakan berikut.

Ayo Menggali Informasi

Dari pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Bagaimana menentukan rumus nilai ke-n pada masalah pertumbuhan?
2. Bagaimana menentukan rumus nilai ke-n pada masalah peluruhan?

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, ingat kembali pada Contoh 2.16 mengenai banyak penduduk dan Contoh 2.17 mengenai banyak bakteri. Selanjutnya, pada Contoh 2.16, dugalah banyak penduduk pada tahun 2020! Untuk mendapat banyak penduduk pada tahun 2020, Anda harus menemukan pola pertambahan banyak penduduk. Demikian pula pada Contoh 2.17, dugalah banyak bakteri setelah 48 jam dan 72 jam. Untuk mendapat banyak bakteri setelah 48 jam dan 72 jam, Anda harus menemukan pola pengurangan banyak bakteri. Gunakan buku referensi matematika atau internet untuk mendukung dugaan sementara Anda.

Ayo Menalar

Masalah Pertumbuhan

Untuk menguatkan dugaan yang Anda buat, mari kita cermati lebih rinci Contoh 2.16 mengenai banyak penduduk. Berdasarkan Contoh 2.16 dapat kita peroleh:

a. Banyak penduduk pada tahun 2010 adalah

$$100.000 + \frac{1}{100}(100.000)$$

$$= 100.000\left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

$$= 100.000(1,01) = 101.000$$

Jadi, banyak penduduk pada tahun 2010 adalah 101.000 orang

b. Banyak penduduk pada tahun 2011 adalah

$$A_{2011} = A_{2010} + \frac{1}{100}A_{2010}$$

$$= 101.000 + \frac{1}{100}(101.000)$$

$$= 101.000\left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

$$= 101.000(1,01) = 102.010$$

dengan A_{2010} menyatakan banyak penduduk pada tahun 2010 dan A_{2011} menyatakan banyak penduduk pada tahun 2011.

Jika dirinci bentuk ini dapat dinyatakan dalam

$$A_{2011} = A_{2010} + \frac{1}{100}A_{2010}$$
$$= [100.000(1+0,01)] + (0,01)[100.000(1+0,01)]$$
$$= [100.000(1+0,01)](1+0,01)$$
$$= 100.000(1+0,01)^2 = 102.010$$

Jadi, banyak penduduk pada tahun 2011 adalah 102.010 orang.

c. Banyak penduduk pada tahun 2012 adalah

$$A_{2012} = A_{2011} + \frac{1}{100}A_{2011}$$
$$= 102.010 + \frac{1}{100}(102.010)$$
$$= 102.010\left(1 + \frac{1}{100}\right)$$
$$= 102.000(1,01) = 103.030$$

dengan A_{2011} menyatakan banyak penduduk pada tahun 2011 dan A_{2012} menyatakan banyak penduduk pada tahun 2012.

Jika dirinci bentuk ini dapat dinyatakan dalam

$$A_{2012} = A_{2011} + \frac{1}{100}A_{2011}$$
$$= [100.000(1+0,01)^2] + (0,01)[100.000(1+0,01)^2]$$
$$= [100.000(1+0,01)^2](1+0,01)$$
$$= 100.000(1+0,01)^3 = 103.030$$

Jadi, banyak penduduk pada tahun 2012 adalah 103.030 orang.

Uraikan pula cara menghitung banyak penduduk pada tahun 2013 dan 2014. Selanjutnya, tuliskan rumus untuk menentukan banyak penduduk pada tahun ke-n setelah tahun 2009 pada tempat yang disediakan berikut. Lebih lanjut, setelah Anda menemukan rumus nilai ke-n untuk Contoh 2.16, tentunya Anda bisa menentukan banyak penduduk pada tahun 2020. Tuliskan pula banyak penduduk pada tahun 2020 tersebut.

Berikut diberikan masalah pertumbuhan lain yang serupa. Namun, pada bagian ini Anda diminta untuk mendapatkan rumus umum nilai ke-n yang mencerminkan rumus umum untuk masalah pertumbuhan.

Contoh 2.18

Suatu perusahaan pakan ternak dapat menghasilkan 400 kw pada awal produksi di tahun pertama. Selanjutnya perusahaan tersebut setiap tahun mentargetkan kenaikan produksi 10% dari tahun sebelumnya. Tentukan

a. Banyak produksi pada tahun ke-5.
b. Banyak produksi pada tahun ke-10.
c. Banyak produksi pada tahun ke-n.

Selanjutnya, buatlah rumus umum dari banyak produksi setelah tahun pertama dengan melengkapi tabel berikut. Disepakati sebelumnya bahwa A menyatakan banyak produksi pada tahun pertama dan r menyatakan persen pertambahan banyak produksi.

Tahun ke-	Banyak Produksi (kw)	Rumus Nilai ke-
1	400	-
2		
3		
4		
5		
$\vdots$		
10		
15		
20		
$\vdots$		
N		

Masalah Peluruhan

Demikian pula terkait masalah peluruhan, berikut rincian Contoh 2.2.4 mengenai banyak bakteri. Berdasarkan Contoh 2.2.4 dapat kita peroleh:

a. Banyak bakteri setelah 4 jam adalah

$$\begin{aligned}&1.000.000-\frac{5}{100}(1.000.000)\\&=1.000.000\left(1-\frac{5}{100}\right)\\&=1.000.000(0,95)=950.000\end{aligned}$$

Jadi, banyak banyak bakteri setelah 4 jam adalah 950.000 organisme.

b. Banyak bakteri setelah 8 jam adalah

$$A_8 = A_4 - \frac{5}{100}A_4$$
$$= 950.000 - \frac{5}{100}(950.000)$$
$$= 950.000\left(1 - \frac{5}{100}\right)$$
$$= 950.000(0,95) = 902.500$$

dengan A_4 menyatakan banyak bakteri setelah 4 jam dan A_8 menyatakan banyak bakteri setelah 8 jam.

Jika dirinci bentuk ini dapat dinyatakan dalam

$$A_8 = A_4 - \frac{5}{100}A_4$$
$$= [1.000.000(1-0,05)] - (0,05)[1.000.000(1-0,05)]$$
$$= [1.000.000(1-0,05)](1-0,05)$$
$$= 1.000.000(1-0,05)^2 = 902.500$$

Jadi, banyak banyak bakteri setelah 8 jam adalah 902.500 organisme.

c. Banyak bakteri setelah 12 jam adalah

$$A_{12} = A_8 - \frac{5}{100}A_8$$
$$= 902.500 - \frac{5}{100}(902.500)$$
$$= 902.500\left(1 - \frac{5}{100}\right)$$
$$= 902.500(0,95) = 857.375$$

dengan A_8 menyatakan banyak bakteri setelah 8 jam dan A_{12} menyatakan banyak bakteri setelah 12 jam.

Jika dirinci bentuk ini dapat dinyatakan dalam

$$A_{12} = A_8 - \frac{5}{100} A_8$$
$$= [1.000.000(1-0,05)^2] + (0,05)[1.000.000(1-0,05)^2]$$
$$= [1.000.000(1-0,05)^2](1-0,05)$$
$$= 1.000.000(1-0,05)^3 = 857.375$$

Jadi, banyak banyak bakteri setelah 12 jam adalah 957.375 organisme.

Uraikan pula cara menghitung banyak bakteri setelah 16 jam, 20 jam, dan 24 jam. Selanjutnya, tuliskan rumus untuk menentukan banyak bakteri setelah n jam pada tempat yang disediakan berikut. Lebih lanjut, setelah Anda menemukan rumus nilai ke-n untuk Contoh 2.18, tentunya Anda bisa menentukan banyak bakteri setelah 48 jam dan 72 jam. Tuliskan pula banyak bakteri setelah 48 jam dan 72 jam tersebut.

Berikut diberikan masalah peluruhan lain yang serupa. Namun, pada bagian ini Anda diminta untuk mendapatkan rumus umum nilai ke-n yang mencerminkan rumus umum untuk masalah peluruhan.

Contoh 2.19

Sebuah industri rumah tangga yang baru beroperasi tahun 2012 membeli mesin produksi seharga Rp100.000.000. Dengan berjalannya proses produksi, maka harga mesin menurun 1% setiap tahun. Tentukan

a. Harga mesin pada tahun ke-2014.
b. Harga mesin pada tahun ke-2020.
c. Harga mesin pada tahun ke-n.

Selanjutnya, buatlah rumus umum dari harga mesin setelah tahun 2012 dengan melengkapi tabel berikut. Kita sepakati bahwa A menyatakan harga mesin pada tahun 2012 dan r menyatakan persen penurunan harga mesin.

Tahun	Harga Mesin (Rp)	Rumus Nilai ke-
2012	100.000.000	-
2013		
2014		
2015		
2016		
$\vdots$		
2020		
2025		
2030		
$\vdots$		
n		

Ayo Mengomunikasikan

Buatlah simpulan Anda tentang rumus umum untuk mendapatkan nilai ke-n dari masalah pertumbuhan dan peluruhan. Diskusikan hasil yang Anda temukan dengan teman sekelompok, kemudian tukar dengan kelompok lain dan beri komentar terhadap hasil kelompok lain. Tuliskan hasil diskusi pada tempat yang disediakan berikut.

Kesimpulan

Latihan 2.2

1. Kultur jaringan pada suatu uji laboratorium menujukkan bahwa satu bakteri dapat membelah diri dalam waktu 2 jam. Diketahui bahwa pada awal kultur jaringan tersebut terdapat 1.000 bakteri.
   a. Apakah masalah ini termasuk masalah pertumbuhan atau peluruhan?
   b. Tentukan banyak bakteri setelah 10 jam.
   c. Tentukan banyak bakteri setelah 20 jam.
   d. Tentukan banyak bakteri setelah n jam.
2. Berdasarkan hasil sensus pada tahun 2010, banyak penduduk di suatu kota berbanyak 200.000 orang. Banyak penduduk ini setiap tahun meningkat 10% dari banyak penduduk tahun sebelumnya.
   a. Apakah masalah ini termasuk masalah pertumbuhan atau peluruhan?
   b. Tentukan banyak penduduk pada tahun 2015.
   c. Tentukan banyak penduduk pada tahun ke-n.
   d. Prediksi banyak penduduk pada tahun 2020.
3. Pada pemeriksaan kedua dokter mendiagnosa bahwa masih ada 800.000 bakteri yang menginfeksi telinga seorang bayi. Untuk mempercepat proses penyembuhan, dokter meningkatkan dosis penisilin yang dapat membunuh 10% bakteri setiap 6 jam.
   a. Apakah masalah ini termasuk masalah pertumbuhan atau peluruhan?
   b. Tentukan banyak bakteri setelah 24 jam dan setelah 72 jam.
   c. Tentukan banyak bakteri setelah n jam.

4. Pada tahun 2014, Pak Abu membeli sebidang tanah seluas 300 m^2 seharga Rp300.000.000. Seiring berjalannya waktu harga tanah terus naik 30% setiap tahun.
   a. Apakah masalah ini termasuk masalah pertumbuhan atau peluruhan?
   b. Tentukan harga tanah pada tahun 2020.
   c. Tentukan harga tanah pada tahun ke-n.
5. Sebuah unsur radioaktif semula berukuran 80 gram. Setelah 48 jam, ukuran menjadi 72 gram. Demikian pula, 48 jam kedua menjadi 64,8 gram.
   a. Berapakah persen kenaikan setiap 48 jam?
   b. Berapa ukuran radioaktif setelah 5×48 jam?

Pengayaan

1. Suatu koloni bakteri pada awalnya ($t = 0$) memiliki 300 sel dan jumlahnya bertambah menjadi 3 kali lipat setiap 4 jam.
   a Berapakah jumlah bakteri setelah 16 jam?
   b. Berapakah jumlah bakteri setelah 24 jam?
   c. Tentukan rumus umum jumlah bakteri setelah t jam.
2. Suatu jenis bakteri diamati perkembangannya setiap jam. Ternyata banyaknya bakteri tiap jam bertambah dan membentuk barisan geometri. Tentukan syaratnya sehingga banyaknya bakteri pada jam kelima lebih banyak daripada banyaknya bakteri pada jam ketiga tetapi lebih sedikit daripada banyaknya bakteri pada jam ketujuh.

3. Suatu populasi bertambah menjadi 2 kali lipat setelah d satuan waktu. Jika banyaknya populasi pada saat ini $t = 0$ adalah p_0, maka buktikan bahwa banyaknya populasi setelah n kali d satuan waktu ádalah $2^n p_0$.

4. Di suatu desa ada seorang kaya yang tamak sehingga disebut Pak Tamak. Di desa tersebut juga ada seorang yang cerdik sehingga disebut Pak Cerdik. Pada suatu hari Pak Cerdik bertemu dengan Pak Tamak. Pak Cerdik memberikan tawaran kepada Pak Tamak sebagai berikut : "Pak Tamak, saya akan memberikan uang kepada Bapak sebesar Rp10.000.000,00 setiap hari selama 30 hari. Sebaliknya Pak Tamak memberikan uang kepada saya sebesar Rp1,00 pada hari pertama, Rp2,00 pada hari kedua, Rp4,00 pada hari ketiga, Rp8,00 pada hari keempat. Jadi banyaknya uang yang diberikan ke saya sebanyak dua kali lipat uang yang diberikan pada hari sebelumnya. Demikian seterusnya sampai hari ke tigapuluh. Apakah Bapak setuju?". Tanpa berpikir panjang pak Tamak menyetujui tawaran Pak Cerdik. Pikirnya,"Tidaklah sukar untuk memberikan uang sebesar Rp1,00, Rp2,00, Rp4,00 dan seterusnya. Saya akan mendapatkan banyak untung".

   Jelaskan siapakah yang menerima uang lebih banyak pada akhir hari ke tigapuluh?

Proyek

Proyek Kelompok : Tawar Menawar Mobil Bekas

Waktu : 5 hari

Materi : Deret Geometri

Anggota kelompok : 2 orang.

Kegiatan

1. Dibentuk 2 kelompok yang masing-masing terdiri atas 2 orang. Kelompok pertama selaku penjual mobil bekas dan kelompok kedua selaku pembeli.
2. Kelompok pertama menjual mobil bekas dengan harga Rp75.000.000,00. Sedangkan kelompok pembeli menawar dengan harga Rp40.000.000,00.
3. Kelompok pertama mengurangi

   Rp75.000.000,00 – Rp40.000.000,00 = Rp35.000.000,00. Kemudian membagi dua Rp35.000.000,00 : 2 = Rp17.500.000,00.

   Setelah itu kelompok pertama menawarkan mobil dengan harga

   Rp75.000.000,00 – Rp17.500.000,00 = Rp57.500.000,00.
4. Kelompok pembeli mengurangi

   Rp57.500.000,00 – Rp40.000.000,00 = Rp17.5000.000,00.

   Kemudian membagi dua Rp17.500.000,00 : 2 = Rp8.750.000,00.

   Setelah itu kelompok pembeli menawar mobil dengan harga

   Rp40.000.000,00 + Rp8.750.000,00 = Rp48.750.000,00.
5. Teruskan proses di atas sehingga tercapai harga kesepakatan sampai perseribuan terdekat.

6. Tentukan harga penawaran awal yang seharusnya ditawarkan oleh kelompok penjual sehingga harga kesepakatan adalah Rp 35.000.000,00 atau kurang. Temukan beberapa harga penawaran awal tersebut.

7. Harga penawaran mobil yang ditawarkan oleh kelompok penjual dapat diperoleh dengan mendefinisikan barisan secara rekursif sebagai berikut

   suku pertama = a_1 = 75.000.000,00

   suku berikutnya $a_n = a_{n-1} - \dfrac{d}{2^{2n-3}}$, dengan $n = 2, 3, 4, \ldots$ dan d = selisih antara harga mobil awal dengan harga awal yang ditawarkan oleh kelompok pembeli.

   Gunakan barisan yang didefinisikan secara rekursif untuk menyelesaikan soal no 5 dan 6 di atas.

8. Empat suku pertama pada barisan di nomor 7 dapat dituliskan sebagai berikut :

   suku pertama = a_1, suku kedua = $a_2 = a_1 - \dfrac{d}{2}$,

   suku ketiga = $a_3 = a_2 - \dfrac{d}{2^3} = a_1 - \dfrac{d}{2} - \dfrac{d}{8}$,

   suku keempat = $a_4 = a_3 - \dfrac{d}{2^5} = a_1 - \dfrac{d}{2} - \dfrac{d}{8} - \dfrac{d}{32}$.

   Terapkan rumus penjumlahan deret geometri tak terhingga pada barisan rekursif di atas, untuk menemukan suatu rumus aljabar sederhana yang menyatakan harga jual mobil yang disepakati dengan mengikuti proses tawar menawar di atas. Notasikan harga jual yang disepakati dengan *H*.

   Periksa kebenaran dari rumus yang diperoleh dengan menggunakannya untuk menyelesaikan soal no 5 dan 6 di atas.

Bab
3

Induksi Matematika

Kompetensi Dasar Dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1.1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya 2.1. Menghayati perilaku disiplin, sikap kerjasama, sikap kritis dan cermat dalam bekerja menyelesaikan masalah kontekstual. 2.2. Memiliki dan menunjukkan rasa ingin tahu, motivasi internal, rasa senang dan tertarik dan percaya diri dalam melakukan kegiatan belajar ataupun memecahkan masalah nyata 3.5. Mendeskripsikan prinsip induksi matematis dan menerapkannya dalam membuktikan rumus jumlah deret persegi dan kubik. 4.5. Mengidentifikasi, menyajikan model matematika dan menyelesaikan masalah induksi matematis dalam membuktikan rumus jumlah deret persegi dan kubik.	Melalui pembelajaran Induksi matematis siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengamati dan menemukan pola induksi matematis 2. Memanipulasi bentuk aljabar untuk membuktikan suatu pernyataan 3. Menduga keberlakuan suatu pernyataan matematis 4. Membuktikan suatu pernyataan menggunakan induksi matematis 5. Menemukan kesalahan dalam pernyataan matematis

Biografi Al-Khawarizmi

Sumber: Kemdikbud

Beberapa cabang ilmu dalam Matematika yang diperkenalkan oleh al-Khawarizmi seperti: geometri, aljabar, aritmatika dan lain-lain. Geometri merupakan cabang kedua dalam matematika. Isi kandungan yang diperbincangkan dalam cabang kedua ini ialah asal-usul geometri dan rujukan utamanya ialah Kitab al-Ustugusat [The Elements] hasil karya Euclid : geometri dari segi bahasa berasal daripada perkataan yunani yaitu 'geo' yang berarti bumi dan 'metri' berarti pengukuran. Dari segi ilmu, geometri adalah ilmu yang mengkaji hal yang berhubungan dengan magnitud dan sifat-sifat ruang. Geometri ini dipelajari sejak zaman Firaun [2000-SM]. Kemudian Thales Miletus memperkenalkan geometri Mesir kepada Yunani sebagai satu sains dalam kurun abad ke 6 SM. Seterusnya sarjana Islam telah menyempurnakan kaidah pendidikan sains ini terutama pada abad ke 9M

Algebra/aljabar merupakan nadi matematika. Karya Al-Khawarizmi telah diterjemahkan oleh Gerhard of Gremano dan Robert of Chaster ke dalam bahasa Eropa pada abad ke-12. sebelum munculnya karya yang berjudul 'Hisab al-Jibra wa al Muqabalah yang ditulis oleh al-Khawarizmi pada tahun 820M. Sebelum ini tak ada istilah aljabar.

Pribadi al-Khawarizmi

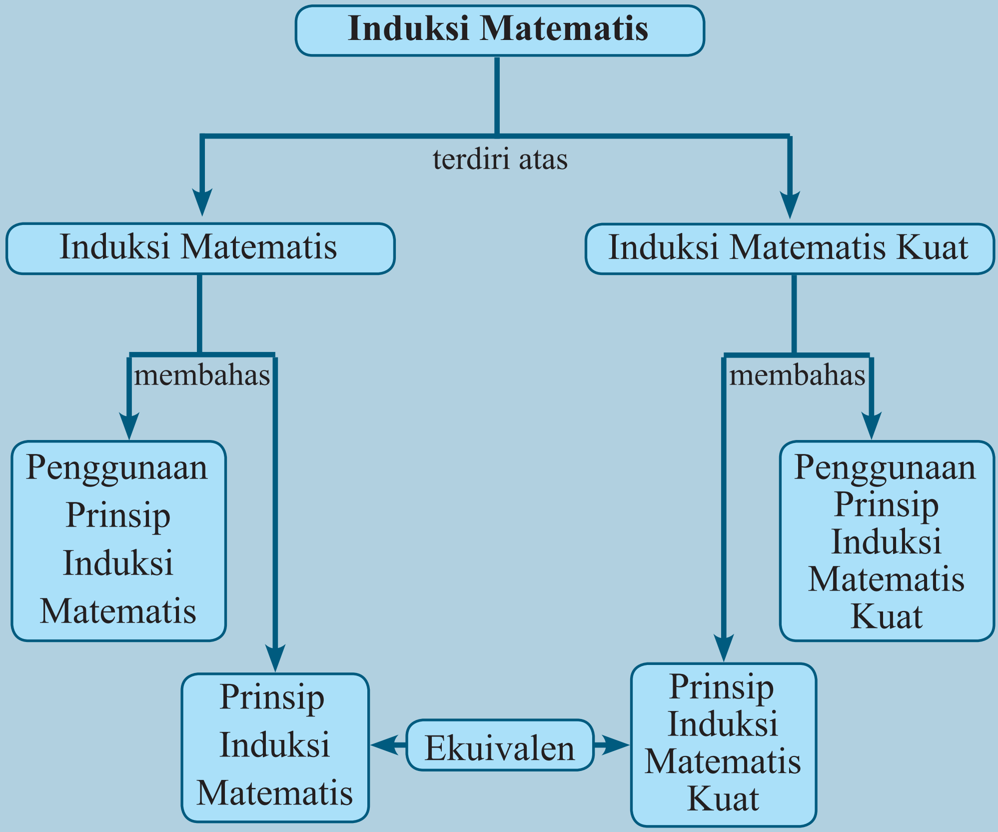
Kepribadian al-Khawarizmi telah diakui oleh orang Islam maupun dunia Barat. Ini dapat dibuktikan bahawa G.Sarton mengatakan bahwa"pencapaian-pencapaian yang tertinggi telah diperoleh oleh orang-orang Timur…." Dalam hal ini Al-Khawarizmi. Tokoh lain, Wiedmann berkata…." al-Khawarizmi mempunyai kepribadian yang teguh dan seorang yang mengabdikan hidupnya untuk dunia sains".

Sumber:http://bacabiografi.blogspot.com/2011/05/biografi-al-khawarizmi-ilmuan-muslim.html

Hikmah yang dapat dipetik:

Belajar ilmu merupakan kegiatan sepanjang hanyat.

Peta Konsep


Induksi Matematis
terdiri atas
Induksi Matematis
Induksi Matematis Kuat
membahas
membahas
Penggunaan Prinsip Induksi Matematis
Penggunaan Prinsip Induksi Matematis Kuat
Prinsip Induksi Matematis
Ekuivalen
Prinsip Induksi Matematis Kuat

Subbab 3.1 Induksi Matematis

Kegiatan 3.1.1 Penalaran Induktif Dan Deduktif

Penalaran induktif dan deduktif adalah dua cara mengambil kesimpulan. Jika penalaran deduktif berangkatnya dari sesuatu yang berlaku secara umum ke sesuatu yang khusus, penalaran induktif justru sebaliknya. Penalaran induktif diperoleh dari menyimpulkan kasus-kasus. Penalaran induktif biasanya digunakan untuk mengembangkan pengetahuan yang bersifat empiris, dan penalaran deduktif biasanya digunakan untuk mengembangkan pengetahuan yang bersifat abstrak. Namun demikian, dua cara ini perlu dimiliki siswa yang sedang belajar, termasuk belajar matematika. Dengan penalaran induktif, siswa akan sampai pada suatu pernyataan yang dikenal dengan istilah konjektur (dalam bahasa Inggris disebut *conjecture*) yang belum tentu benar secara mutlak. Dengan penalaran deduktif, kebenaran yang diperoleh merupakan kebenaran mutlak. Bagaimana dengan induksi matematis, apakah ini termasuk penalaran induktif atau deduktif? Mari kita perhatikan contoh-contoh berikut.

Ayo Mengamati

Contoh 3.1

Perhatikan pernyataan berikut.

Apapun bilangan asli yang kita substitusikan pada n dalam bentuk $n^2 - n + 41$, maka hasilnya pasti bilangan prima.

Mari kita substitusikan beberapa bilangan asli berturut-turut ke dalam tabel berikut.

n	Nilai $n^2 - n + 41$	Prima/Bukan Prima
1	41	Bilangan prima
2	43	Bilangan prima
3	47	Bilangan prima
4	53	Bilangan prima
5	61	Bilangan prima
6	71	Bilangan prima
7	83	Bilangan prima
8	97	Bilangan prima
9	113	Bilangan prima
10	131	Bilangan prima

Dari kolom ketiga di atas, tampak bahwa semua bilangan adalah bilangan prima. Kalau kita menggunakan kasus-kasus di atas untuk mengambil kesimpulan, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $n^2 - n + 41$ adalah bilangan prima untuk apapun bilangan n-nya. Penalaran semacam ini kita sebut penalaran induktif.

Penalaran semacam ini sah-sah saja, dan ini yang sering terjadi dalam pengembangan ilmu-ilmu alam atau sosial. Kesimpulannya diperoleh dengan cara induktif.

Di dalam matematika, kebenaran suatu pernyataan itu harus bersifat absolut/mutlak. Kalau dikatakan bahwa $n^2 - n + 41$ adalah bilangan prima untuk setiap bilangan asli n, maka pernyataan ini harus benar untuk bilangan asli apapun. Sayangnya, pernyataan bahwa $n^2 - n + 41$ adalah bilangan prima untuk setiap n bilangan asli adalah **tidak benar**.

Sebagai contoh, untuk $\boldsymbol{n = 41}$ maka nilai $\boldsymbol{n^2 - n + 41}$ adalah bilangan yang habis dibagi 41. Karenanya, untuk $n = 41$, nilai $\boldsymbol{n^2 - n + 41}$ adalah $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ yang jelas bukan bilangan prima. Artinya, kesimpulan dari hasil penalaran induktif tidak selalu benar untuk semua nilai n. Oleh karenanya secara matematis tidak bisa diterima sebagai kebenaran mutlak.

Contoh 3.2

Jika p adalah bilangan prima, maka kita cenderung mengambil kesimpulan dari penalaran induktif bahwa $2^p - 1$ adalah bilangan prima juga. Mengapa demikian?

Coba kita substitusikan beberapa bilangan.

Jika $p = 2, 3, 5, 7$ maka $2p - 1$ akan bernilai 3, 7, 31, 127 yang semuanya adalah bilangan prima.

Tetapi, kalau kita substitusikan $p = 11$, maka hasilnya adalah 2047 yang bukan bilangan prima. Sebab 2.047 memiliki faktor lain selain 1 dan 2047 yaitu antara lain 23 dan 89. Periksalah bahwa $23 \times 89 = 2.047$.

Jadi, penalaran induktif yang umum seperti itu tidak menjamin diperolehnya pernyataan yang benar untuk setiap bilangan asli.

Contoh 3.3

Sekarang perhatikan pertidaksamaan $n < 2^n$. Apakah pertidaksamaan itu benar untuk semua bilangan asli n?

Mari kita periksa kebenaran pertidaksamaan tersebut dengan mensubstitusikan 10 bilangan asli yang pertama ke dalam tabel berikut.

n	$n < 2^n$	Benar/Salah
1	$1 < 2^2 = 2$	Benar
2	$2 < 2^2 = 4$	Benar
3	$3 < 2^3 = 8$	Benar

n	$n < 2^n$	Benar/Salah
4	$4 < 2^4 = 16$	Benar
5	$5 < 2^5 = 32$	Benar
6	$6 < 2^6 = 64$	Benar
8	$8 < 2^8 = 256$	Benar
9	$9 < 2^9 = 512$	Benar
10	$10 < 2^{10} = 1024$	Benar

Untuk 10 bilangan asli yang pertama tampak bahwa pertidaksamaan ini benar. Kenyataannya ini juga berlaku bahwa apapun bilangan asli n tertentu yang kita pilih, maka pertidaksamaan $n < 2^n$ ini juga akan benar.

Apakah dengan kegiatan penalaran induktif ini kita sudah membuktikan dan menyimpulkan bahwa pertidaksamaan $n < 2^n$ benar untuk semua bilangan asli n?

Contoh 3.4

Selidiki untuk bilangan asli n mana saja pertidaksamaan $3^n > n^3$ bernilai benar. Dengan mengunakan tabel berikut, kita akan mengecek kebenaran pertidaksamaan di atas untuk 8 bilangan asli yang pertama.

n	$3^n > n^3$	Benar/Salah
1	$3 = 3^1 > 1^3 = 1$	Salah
2	$9 = 3^2 > 2^3 = 8$	Salah
3	$27 = 3^3 > 3^3 = 27$	Salah
4	$81 = 3^4 > 4^3 = 64$	Benar
5	$243 = 3^5 > 5^3 = 125$	Benar
6	$729 = 3^6 > 6^3 = 216$	Benar
7	$2.187 = 3^7 > 7^3 = 343$	Benar
8	$6.561 = 3^8 > 8^3 = 512$	Benar

Dari tabel di atas, tampak bahwa untuk tiga bilangan asli pertama, pertidaksamaan bernilai salah. Pertidaksamaan baru bernilai benar setelah bilangan asli 4 ke atas.

Dengan kegiatan penalaran induktif, dapat disimpulkan bahwa pertidaksamaan $3^n > n^3$ benar untuk semua bilangan asli n yang lebih atau sama dengan 4.

Penarikan kesimpulan secara induktif yang umum ini tidak bisa diterima sebagai kebenaran mutlak di dalam matematika.

Lain halnya dengan **induksi matematis**. Prinsip induksi matematis merupakan teorema yang dapat dibuktikan kebenarannya (bukti teorema tersebut dapat kamu pelajari pada Buku Matematika di Perguruan Tinggi). Kebenaran yang diperoleh pada Prinsip Induksi Matematis merupakan kebenaran yang berlaku dalam semesta pembicaraannya. Dengan demikian, prinsip induksi matematis merupakan penalaran deduktif. Prinsip induksi matematis itulah yang akan kita pelajari sekarang.

Ayo Menanya

Kalau Anda sudah membaca pendahuluan di atas, khususnya di bagian akhir, tentunya Anda pasti ingin tahu tentang apa induksi matematis itu. Mungkin Anda akan bertanya:

1. Apa sebenarnya induksi matematis itu?
2. Apa bedanya induksi matematis dengan penalaran induktif yang biasa kita kenal itu?
3. Untuk hal yang bagaimana induksi matematis itu digunakan?
4. Mengapa induksi matematis bisa diterima sebagai prinsip pembuktian yang valid dalam matematika (penalaran deduktif)?

Sekarang, tuliskan pertanyaan Anda pada tempat yang disediakan berikut. Buatlah pertanyaan yang berkenaan dengan apa yang Anda amati pada induksi matematis. Sila tuliskan pertanyaan Anda di kotak berikut atau di buku catatan Anda.

Ayo Menggali Informasi

Mudah-mudahan Anda semua mempertanyakan

1. Apa sebenarnya induksi matematis itu?
2. Mengapa induksi matematis merupakan suatu penalaran deduktif?
3. Bagaimana menggunakan induksi matematis dalam pembuktian suatu pernyataan?

Kalau Anda menanyakan ini, berarti Anda memang ingin memahami apa yang dimaksud dengan induksi matematis, mengapa induksi matematis merupakan suatu penalaran deduktif, dan bagaimana induksi matematis digunakan dalam pembuktian matematis.

Sekarang perhatikan tahap awal penalaran dalam Induksi Matematis.

Induksi Matematis: Tahap Awal

Perhatikan $P(n)$ suatu pernyataan yang berkenaan dengan semua bilangan asli n. Misalkan $P(n)$ memenuhi dua sifat:

1. $P(1)$ bernilai benar

2. Jika $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar.

Mari kita identifikasi nilai kebenaran $P(n)$ tersebut.

Berdasarkan pernyataan (1), maka $P(1)$ bernilai benar.

Pertanyaannya, apakah $P(2)$ juga bernilai benar?

Berdasarkan kenyataan bahwa $P(1)$ benar, maka dengan mengikuti sifat (2) yaitu untuk setiap bilangan asli k apabila $P(k)$ bernilai benar, maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar, diperoleh $P(1 + 1) = P(2)$ bernilai benar.

Pertanyaan berikutnya, apakah $P(3)$ bernilai benar?

Dari proses sebelumnya kita sudah tahu bahwa $P(2)$ bernilai benar.

Berdasarkan sifat (2) lagi, maka $P(2 + 1) = P(3)$ juga bernilai benar.

Mungkin ada baiknya kita gunakan tabel untuk mengetahui lebih jauh tentang nilai kebenaran $P(n)$.

Diketahui	Dasar Pengambilan Kesimpulan	Kesimpulan
$P(1)$ benar	Sifat (2) (Untuk setiap bilangan asli k, apabila $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar)	$P(1 + 1) = P(2)$ benar
$P(2)$ benar	Sifat (2)	$P(2 + 1) = P(3)$ benar
$P(3)$ benar	Sifat (2)	$P(3 + 1) = P(4)$ benar
$P(4)$ benar	Sifat (2)	$P(4 + 1) = P(5)$ benar
$P(5)$ benar	Sifat (2)	$P(5 + 1) = P(6)$ benar
$P(6)$ benar	Sifat (2)	$P(6 + 1) = P(7)$ benar
$P(7)$ benar	Sifat (2)	$P(7 + 1) = P(8)$ benar
$P(8)$ benar	Sifat (2)	$P(8 + 1) = P(9)$ benar
$P(9)$ benar	Sifat (2)	$P(9 + 1) = P(10)$ benar
$P(10)$ benar	Sifat (2)	$P(10 + 1) = P(11)$ benar

Apabila kita melakukannya terus menerus, maka dapat diperoleh bahwa $P(n)$ benar untuk semua n bilangan asli.

Ayo Menalar

Dari informasi yang telah Anda peroleh di atas, sekarang apabila kita mempunyai suatu pernyataan $P(n)$ yang berkenaan dengan semua bilangan asli n, dan memenuhi dua sifat:

1. $P(1)$ benar
2. Untuk setiap bilangan asli k, apabila $P(k)$ benar maka $P(k + 1)$ juga benar.

Apa yang dapat disimpulkan dengan $P(n)$ tersebut?

Diskusikan pertanyaan tersebut dengan teman sebangkumu, kemudian tuliskan hasilnya dalam kotak berikut.

Ayo Mengomunikasikan

Setelah Anda berdiskusi bersama teman sebangkumu, sekarang dipersilakan melakukan diskusi kelas untuk membandingkan hasil pekerjaan diskusi kelompok Anda dan sekaligus untuk memperoleh jawaban tentang pernyataan $P(n)$ yang mempunyai dua sifat di atas. Mintalah bantuan guru Anda apabila menemui kesulitan atau terjadi ketidaksepahaman dengan teman Anda yang lain ketika diskusi kelas.

Tuliskan secara individu hasil diskusi kelas yang telah Anda peroleh dalam kotak berikut.

Diskusi

Catatan.

Pada proses perolehan kesimpulan $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli n dengan cara di atas, bukan merupakan bukti formal secara matematis, melainkan hanya sekedar menyakinkan Anda secara intuisi bahwa dengan prinsip induksi matematis, pernyataan $P(n)$ yang mempunyai dua sifat di atas adalah benar untuk semua bilangan asli n Bukti formal induksi matematis dapat Anda pelajari dari buku matematika tingkat perguruan tinggi.

Dengan demikian prinsip induksi matematis merupakan suatu penalaran deduktif.

Kegiatan 3.1.2 Prinsip Induksi Matematis

Dari contoh-contoh yang telah didiskusikan pada subbab 3.1.1, khususnya pada Contoh 3.3 dan 3.4, kita telah menarik suatu kesimpulan secara induktif tentang kebenaran pernyataan tersebut. Pada Contoh 3.3, pernyataan matematika yang merupakan hasil dari penalaran induktif, berlaku untuk semua bilangan asli n. Sedangkan untuk Contoh 3.4, pernyataan tersebut berlaku pada himpunan bagian dari himpunan bilangan asli.

Setelah Anda mengetahui bahwa induksi matematis merupakan suatu penalaran deduktif, sekarang bagaimana sesungguh prinsip induksi matematis tersebut?

Ayo Mengamati

Perhatikan dengan cermat dan teliti contoh-contoh dan pembuktiannya di bawah ini.

Contoh 3.5

Jumlah n suku pertama bilangan asli $1 + 2 + 3 + ... + n$ adalah $\frac{1}{2}\ n(n + 1)$.

Contoh 3.6

Pada setiap segi n, jumlah semua sudut dalamnya adalah $(n - 2)180$ derajat.

Contoh 3.7

Banyak diagonal pada segi banyak konveks dengan n titik sudut adalah $\frac{1}{2}\ n(n-3)$.

Pembuktian kebenaran pernyataan pada Contoh 3.5.

Kebenaran pernyatan pada Contoh 3.5 berlaku untuk semua bilangan asli n. Anda dapat mengingat kembali materi tentang deret aritmetika, bahwa jumlah n suku pertama bilangan asli $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}\ n(n + 1)$ adalah benar untuk apapun bilangan asli n. Artinya, jika kesamaan $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$ ini disebut $P(n)$, maka $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, ... dan seterusnya adalah pernyataan-pernyataan yang bernilai benar.

Kalau dikaitkan dengan pola $P(n)$ di atas, maka pembuktian $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli n, dapat dinyatakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. $P(1)$ benar.
2. Untuk setiap bilangan asli k, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar.

Pembuktian Kebenaran pernyataan pada Contoh 3.6.

Kebenaran pernyataan pada Contoh 3.6 berlaku untuk semua bilangan asli n yang lebih besar atau sama dengan 3. Mengapa?

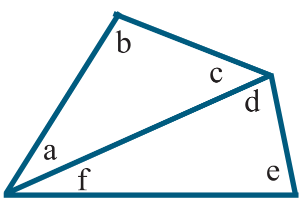
Dengan demikian, secara matematis, pernyataan Contoh 3.6 dapat dinyatakan sebagai berikut.

$P(n)$: Pada setiap segi-n, dengan $n \geq 3$, jumlah semua sudut dalamnya adalah $(n - 2)180°$.

Jumlah sudut dalam segitiga adalah 180° dan semua orang mungkin sudah mengenal hal itu. Bagaimana dengan jumlah sudut dalam segiempat, segilima dan seterusnya. Coba Anda amati ilustrasi berikut.

Jumlah sudut dalam segiempat.

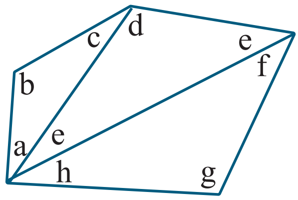
Jumlah sudut dalam segiempat adalah 360° dan ini bisa ditunjukkan dengan ilustrasi sebagai berikut.



Jumlah sudut dalam segiempat ini adalah
$a + b + c + d + e + f = (a + b + c) + (d + e + f)$
$= 180 + 180 = 360$

Jumlah sudut dalam segilima

Jumlah sudut dalam segi lima adalah 540° dan ini bisa ditunjukkan dengan ilustrasi sebagai berikut.



Jumlahnya adalah $(a + b + c) + (d + e + i) + (f + g + h)$.
Karena masing-masing kelompok berjumlah 180°, maka total jumlah semua sudut dalamnya adalah
$3 \times 180°$

Kalau diteruskan, maka kita akan memperoleh pola $P(n)$ seperti pada tabel berikut.

Jenis Segi n	Jumlah sudut (derajat)	Pola (dalam derajat)
3	180	$1 \cdot 180$
4	360	$2 \cdot 180 = (4 – 2) \cdot 180$
5	540	$3 \cdot 180 = (5 – 2) \cdot 180$
6	720	$4 \cdot 180 = (6 – 2) \cdot 180$
7	900	$5 \cdot 180 = (7 – 2) \cdot 180$
8	1.080	$6 \cdot 180 = (8 – 2) \cdot 180$
9	1.260	$7 \cdot 180 = (9 – 2) \cdot 180$
10	1.440	$8 \cdot 180 = (10 – 2) \cdot 180$
11	1.620	$9 \cdot 180 = (11 – 2) \cdot 180$
12	1.800	$10 \cdot 180 = (12 – 2) \cdot 180$

Dengan meneruskan pola di atas, maka kita peroleh $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 3$.

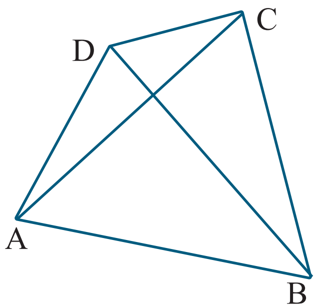
Kalau dikaitkan dengan pola $P(n)$ di atas, maka pembuktian $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli $n \geq 3$, dapat dinyatakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. $P(3)$ benar
2. Untuk setiap bilangan asli $k \geq 3$, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar.

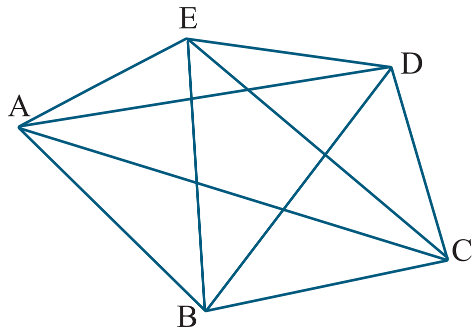
Pembuktian kebenaran pernyataan pada Contoh 3.7

Kebenaran dari pernyataan pada Contoh 3.7 ini berlaku hanya pada bilangan asli mulai dari 4. Mengapa?

Perhatikan ilustrasi berikut.



Diagonal dari segiempat *ABCD* ini ada 2, yaitu *AC* dan *BD*



Diagonal dari segilima *ABCDE* ini ada 5, yaitu *AD, AC, BD, BE*, dan *CE*

Kalau Anda meneruskan pembuatan ilustrasinya sampai segidelapan, maka Anda akan memperoleh pola seperti pada tabel sebagai berikut.

Jenis Segi-*n*	Banyak diagonalnya	Pola
4	2	$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(4-3)$
5	5	$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(5-3)$
6	9	$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(6-3)$
7	14	$\frac{1}{2}\cdot 7\cdot(7-3)$
8	20	$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot(8-3)$

Dengan meneruskan cara di atas, maka kita peroleh $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 4$.

Kalau dikaitkan dengan pola $P(n)$ di atas, maka pembuktian $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli $n \geq 4$, dapat dinyatakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. $P(4)$ benar
2. Untuk setiap bilangan asli $k \geq 4$, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar.

Langkah-langkah pada pembuktian di atas merupakan contoh dari langkah-langkah pembuktian dengan prinsip induksi matematis.

Ayo Menanya

Setelah Anda mengamati contoh-contoh dan pembuktiannya di atas, Anda pasti akan bertanya, bagaimana sebenarnya prinsip induksi matematis itu?

Buatlah pertanyaan-pertanyaan yang berkenaan dengan prinsip induksi matematis, kemudian tulislah pertanyaan itu dalam kotak berikut.

Ayo Menggali Informasi

Berdasarkan Contoh 3.5 beserta cara pembuktiannya, maka prinsip pembuktian dengan induksi matematis dinyatakan sebagai berikut:

> ***Prinsip Induksi Matematis***
>
> *Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan dimana kebenarannya ditentukan oleh nilai n. Jika $P(n)$ memenuhi dua sifat berikut.*
>
> 1. *$P(n)$ itu benar untuk $n = 1$.*
> 2. *Untuk setiap bilangan asli k, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar,*
>
> *Maka $P(n)$ bernilai benar untuk setiap bilangan asli n,*

Seperti yang Anda lihat dari Contoh 3.6 dan 3.7 serta pembuktiannya di atas, kebenaran pernyataan matematika tidak harus untuk semua bilangan asli n. Kadang kebenarannya hanya untuk bilangan asli mulai dari 3 ke atas, 4 ke atas, atau bahkan 10 ke atas. Beberapa contoh di atas telah menegaskan hal ini. Karena itu, di samping prinsip induksi matematis yang awal tadi, ada juga prinsip induksi matematis yang diperluas, yaitu:

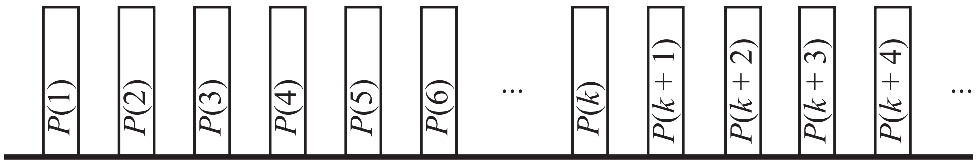
> ***Prinsip Induksi Matematis Yang Diperluas***
>
> *Misalkan $P(n)$ adalah suatu pernyataan dimana kebenarannya ditentukan oleh nilai n. Jika $P(n)$ memenuhi dua sifat berikut.*
>
> 1. *$P(n)$ itu benar untuk $n = m$.*
> 2. *Untuk setiap bilangan asli $k \geq m$, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar,*
>
> Maka $P(n)$ bernilai benar untuk semua bilangan asli yang lebih atau sama dengan m.

Kalau kita diibaratkan pernyataan $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n)$, ... sebagai kartu-kartu remi $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n)$, ... yang berjajar ke samping.

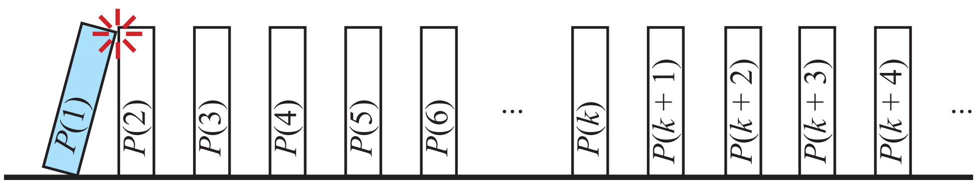
Sifat (1), pernyataan $P(1)$ benar, dapat diibaratkan sebagai kartu remi $P(1)$ jatuh.

Sifat (2), untuk sebarang kartu remi $P(k)$ yang jatuh, dapat menjatuhkan kartu remi berikutnya $P(k + 1)$.

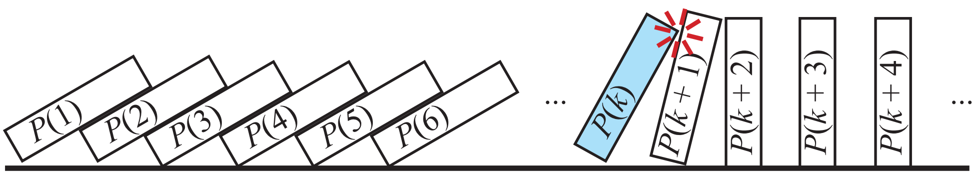
Karena kartu remi $P(1)$ jatuh, maka kartu remi $P(2)$ juga jatuh. Kemudian karena kartu remi $P(2)$ jatuh, maka kartu remi $P(3)$ juga jatuh. Selanjutnya kartu remi $P(4)$ jatuh, dan seterusnya. Akhirnya kesimpulan yang diperoleh semua kartu remi jatuh.



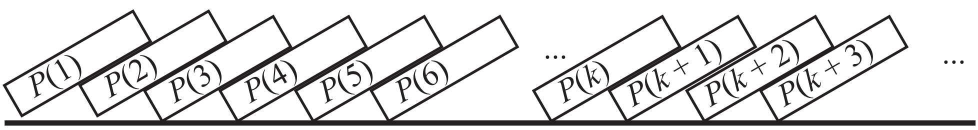
Pernyataan $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k)$, $P(k + 1)$, ...



Pernyataan $P(1)$ jatuh



Misalkan $P(k)$ jatuh akan menyebabkan $P(k + 1)$ juga jatuh



Semua pernyataan jatuh

Ayo Menalar

Dari informasi yang telah Anda peroleh, sekarang Anda membentuk kelompok antara 3 – 4 orang untuk mendiskusikan pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Bagaimana langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n?
2. Bagaimana langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$, untuk suatu bilangan asli m?

Tuliskan hasil diskusi kelompok Anda dalam kotak berikut.

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ untuk suatu bilangan asli m adalah sebagai berikut:

Ayo Mengomunikasikan

Setelah Anda melakukan diskusi kelompok dan menuliskan hasilnya, selanjutnya kelompok Anda saling berkunjung dengan kelompok lain untuk mendiskusikan hasil yang telah diperoleh. Tuliskan secara individu, hasil diskusi saling kunjung sebagai suatu kesimpulan yang telah diperoleh untuk menjawab dua pertanyaan di atas.

Kesimpulan

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:

Kesimpulan

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ untuk suatu bilangan asli m adalah sebagai berikut:

Kegiatan 3.1.3 Penerapan Induksi Matematis

Prinsip induksi matematis banyak digunakan dalam pembuktian dalam matematika. Anda akan diberikan beberapa contoh penerapan prinsip induksi matematis. Silahkan Anda amati dengan seksama.

Ayo Mengamati

Contoh 3.8

Buktikan bahwa "untuk semua bilangan asli n, jumlah n bilangan ganjil berurutan pertama sama dengan n^2".

Bukti.

Misalkan pernyataan $P(n)$: jumlah n bilangan ganjil berurutan pertama sama dengan n^2.

1. *Langkah Dasar*

Pernyataan $P(n)$ ini benar untuk $n = 1$ sebab "jumlah" 1 bilangan ganjil yang pertama adalah 1 itu sendiri, dan 1 sama dengan 1^2.

Jadi, terbukti bahwa pernyataan $P(1)$ di atas adalah benar.

2. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(k)$ benar.

Artinya bahwa "jumlah k bilangan ganjil berurutan pertama adalah k^2"

Akan ditunjukkan terbukti benar juga bahwa $P(k + 1)$ jumlah $k + 1$ bilangan ganjil berurutan pertama adalah $(k + 1)^2$.

Dari pemisalan, bahwa $P(k)$ jumlah k bilangan ganjil berurutan pertama adalah k^2 adalah benar. Secara matematis, pernyataan $P(k)$ ini bisa dituliskan menjadi

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$$

Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$: jumlah $k + 1$ bilangan ganjil berurutan pertama adalah $(k + 1)^2$. yang secara matematis dituliskan menjadi

$$P(k+1):\ 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$

Kita lihat ruas kiri dari persamaan terakhir ini, yaitu:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1)$$

Bentuk ini kalau diolah akan menghasilkan seperti berikut.

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2(k + 1) - 1)$$

$$= k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Jadi terbukti bahwa

$P(k + 1) : 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$ bernilai benar.

3. *Kesimpulan*

$P(n)$ jumlah n bilangan ganjil berurutan pertama sama dengan n^2 benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 3.9

Tunjukkan bahwa "3 membagi $n(n + 1)(n + 2)$ untuk setiap bilangan asli n"?

Bukti.

Misalkan $P(n)$ 3 membagi $n(n + 1)(n + 2)$ untuk setiap bilangan asli n.

1. *Langkah Dasar*

Untuk $n = 1$, nilai $n(n + 1)(n + 2)$ adalah 6. Karenanya 3 membagi $n(n + 1)(n + 2)$ untuk $n = 1$. Jadi terbukti bahwa pernyataan $P(n)$ tersebut bernilai benar untuk $n = 1$.

2. *Langkah Induksi*

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan pernyataan $P(k)$ itu bernilai benar. Artinya, kita anggap bahwa 3 membagi $k(k + 1)(k + 2)$.

Akan ditunjukkan bahwa $P(k + 1)$ bernilai benar, yaitu 3 membagi $(k + 1)((k + 1) + 1)((k + 1) + 2)$ atau 3 membagi $(k + 1)(k + 2)(k + 3)$.

Dengan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, maka bentuk $(k + 1)(k + 2)(k + 3)$ dapat diubah menjadi $[(k + 1)(k + 2)k] + [(k + 1)(k + 2)3]$ yang merupakan penjumlahan dari $k(k + 1)(k + 2)$ dan $3(k + 1)(k + 2)$.

Dari pemisalan, sudah diketahui bahwa 3 membagi $k(k + 1)(k + 2)$.

Karena 3 juga membagi $3(k + 1)(k + 2)$, maka 3 juga membagi $k(k + 1)(k + 2) + 3(k + 1)(k + 2)$.

Dengan demikian, $P(k + 1)$ 3 membagi $(k + 1)((k + 1) + 1)((k + 1) + 2)$ bernilai benar.

Jadi, jika 3 membagi $k(k + 1)(k + 2)$ maka 3 membagi $(k + 1)((k + 1) + 1)((k + 1) + 2)$.

3. *Kesimpulan*

$P(n)$: 3 membagi $n(n + 1)(n + 2)$ benar untuk setiap bilangan asli n.

Contoh 3.10

Buktikan bahwa pertidaksamaan $3^n > n^3$ berlaku untuk semua bilangan asli $n \geq 4$.

Bukti

Misalkan $P(n)$: $3^n > n^3$ untuk bilangan asli $n \geq 4$

1. ***Langkah Dasar***

Untuk $n = 4$, maka seperti pada penyelidikan Contoh 3.4, $P(4)$: $81 = 3^4 > 4^3 = 64$ bernilai benar.

Jadi pertidaksamaan $P(n)$: $3^n > n^3$ berlaku untuk $n = 4$.

2. ***Langkah Induksi***

Untuk setiap bilangan asli $k \geq 4$, misalkan pertidaksamaan $P(n)$: $3^n > n^3$ bernilai benar. Ini berarti $3^k > n^k$ untuk $k \geq 4$.

Akan ditunjukkan bahwa pertidaksamaan $P(n)$: $3^n > n^3$ juga berlaku untuk $n = k + 1$, yaitu

$P(k + 1)$: $3^{k+1} > (k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$.

Untuk menunjukkan ini, dengan menggunakan $3^k > k^3$ untuk $k \geq 4$, perhatikan bahwa $3^{k+1} = 3^k \cdot 3^1 = 3(3^k) \geq 3(k^3) = k^3 + 2k^3$ .... **(1)**

Karena $k \geq 4 > 3$, maka untuk

$2k^3 = k^3 + k^3 = k \cdot k^2 + k^2 \cdot k > 3 \cdot k^2 + 3^2 \cdot k = 3k^2 + 9k = 3k^2 + 3k + 6k > 3k^2 + 3k + 1$. **(2)**

Dengan memsubstitusikan persamaan **(2)** ke persamaan **(1)**, diperoleh

$3^{k+1} > k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k + 1)^3$

Ini berarti pertidaksamaan $P(n)$: $3^n > n^3$ berlaku untuk $n = k + 1$.

3. ***Kesimpulan***

$P(n)$: $3^n > n^3$ berlaku untuk semua bilangan asli $n \geq 4$.

Ayo Menanya

Kalau Anda telah mengamati dengan sempurna, bayangkan ada orang lain yang Anda sayangi yang juga ingin tahu tentang penerapan prinsip induksi matematis ini dalam pembuktian. Tentu mereka akan ingin tahu dan akan menanyakan sesuatu kepada Anda. Kira-kira pertanyaan apa saja yang akan mereka ajukan, dan tuliskan pertanyaan mereka itu pada tempat kosong berikut.

Ayo Menggali Informasi

Guru Anda sebenarnya telah menyediakan beberapa contoh pernyataan dan bukti kebenaran dari pernyataan tersebut dengan induksi matematis. Mintalah contoh-contoh tersebut kepada guru Anda.

Anda juga dapat memperoleh contoh-contoh pengggunaan induksi matematiks di dalam buku-buku matematika tingkat lanjut, atau di internet. Cobalah kumpulkan contoh-contoh pembuktian itu, baik yang Anda peroleh dari guru Anda maupun yang dari internet, menjadi satu kumpulan contoh pembuktian dengan induksi matematis. Tata contoh-contoh tersebut sedemikian rupa mulai berdasarkan tingkat kesulitannya atau berdasarkan jenis materinya.

Ayo Menalar

Anda sudah memiliki kumpulan contoh pembuktian dengan induksi matematis. Coba Anda analisis pembuktian itu dengan menggunakan pisau analisis berikut:

1. Ada berapa langkah yang digunakan dalam pembuktian itu?
2. Apa yang istimewa dari langkah pertama kalau dibandingkan dengan apa yang diketahui dari soal atau pernyataan yang akan dibuktikan?
3. Apa yang istimewa dari langkah kedua dari pembuktian tersebut?

Tuliskan hasil analisis Anda ke dalam power point atau kertas manila dan siapkan diri untuk saling berbagi dengan teman Anda.

Ayo Mengomunikasikan

Coba saling pertukarkan power point atau kertas manila Anda dengan teman Anda. Cobalah meminta penjelasan kepada teman Anda tentang apa yang teman Anda tuliskan dan kritisi, tanyakan, atau berikan saran perbaikannya.

Kalau sudah, cobalah Anda membentuk kelompok 4 orang dan sepakatilah kesimpulan kelompok Anda. Sesudah itu, coba Anda tengok pekerjaan kelompok lain dan bandingkan dengan pekerjaan Anda.

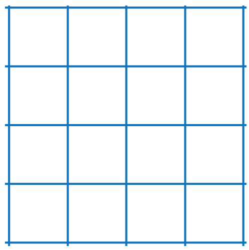
Latihan 3.1

1. Membuat *generalisasi* dan menemukan formula.

   Perhatikan *grid* sebagai berikut, kemudian buatlah generalisasi untuk menentukan

   a. banyaknya persegi yang bisa ditemukan pada *grid*.

   b. Banyaknya persegipanjang yang bisa ditemukan pada *grid*.



2. Membuktikan dengan Induksi matematis.

   Buktikan bahwa pernyataan berikut bernilai benar.

   a. $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n = n(n + 1)$, untuk setiap bilangan asli n.

   b. $1 + 2 + 4 + 8 + ...\ 2^{n-1} = 2^n - 1$, untuk setiap bilangan asli n.

   c. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, untuk setiap bilangan asli n.

   d. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$, untuk setiap bilangan asli n.

   e. $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ untuk setiap bilangan asli.

   f. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ untuk setiap bilangan asli.

   g. $n^3 + 5n$ adalah kelipatan 6 untuk setiap bilangan asli n.

h. Jumlah pangkat 3 dari setiap tiga bilangan asli berurutan habis dibagi 9.

i. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \le 2-\frac{1}{n}$, untuk setiap bilangan asli n.

j. $\cos x \cos 2x \cos 4x \ldots \cos 2^{n-1}x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$, untuk setiap bilangan asli n.

k. Misalkan $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ dengan n adalah bilangan asli.

   Buktikan : x_{3n} merupakan bilangan genap, untuk semua bilangan asli n.

l. Buktikan bahwa $n^2 + 3 \le 2^n$, untuk semua bilangan asli $n \ge 5$.

m. Buktikan bahwa $5n + 5 \le n^2$, untuk semua bilangan asli $n \ge 6$.

3. Barisan Fibonacci adalah barisan yang berbentuk

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$$

Perhatikan bahwa dua suku pertama adalah 1 dan 1, dan sebarang suku selanjutnya adalah jumlah dua suku sebelumnya. Contohnya suku ketiga adalah $1 + 1 = 2$, suku keempat adalah $1 + 2 = 3$, dan seterusnya. Kita menyatakan suku ke-n dari barisan ini sebagai F_n. Jadi, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, dan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Barisan Fibonacci perlu diperkenalkan disini karena barisan Fibonacci berkaitan erat dengan induksi matematis. Barisan ini memiliki struktur dan pola yang menarik. Perhatikan kondisi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ atau ekuivalen dengan $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ yang merupakan langkah persiapan induksi yang sempurna. Kondisi tersebut mengarahkan kita bahwa kita dapat menentukan sesuatu tentang F_n dengan melihat suku-suku barisan yang sebelumnya. Karena itu dalam penggunaan induksi untuk membuktikan sesuatu tentang barisan Fibonacci, dapat diharapkan untuk menggunakan persamaan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dalam langkah pembuktiannya.

Buktikan sifat-sifat barisan Fibonacci berikut:

a. $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$, untuk semua n bilangan asli.

b. $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$, untuk semua n bilangan asli.

c. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + ... + F_n^2 = F_n F_{n+1}$, untuk semua n bilangan asli..

d. $F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$, untuk semua n bilangan asli.

e. $F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$, untuk semua n bilangan asli.

4. Pada tahun ajaran baru ada 30 siswa kelas baru di kelas *X*. Untuk memperkenalkan diri setiap siswa saling bersalaman dengan siswa lainnya. Kita ingin mengetahui ada berapa banyak jabat tangan yang terjadi.

   a. Untuk mengetahui hal tersebut, isilah tabel di bawah ini

Banyak siswa	Banyak jabat tangan yang terjadi
2	
3	
4	
5	

   b. Apakah Anda sudah dapat menduga pola banyak jabat tangan yang terjadi? Tuliskan pola itu dan gunakan untuk mencari banyak jabat tangan yang terjadi jika ada 10 siswa, 30 siswa, dan n siswa.

   c. Buktikanlah pola yang diperoleh di bagian (ii) dengan menggunakan induksi matematis !

5. Tunjukkan apa yang salah pada “pembuktian” “teorema” berikut .

   a. “Teorema” : Untuk setiap bilangan bulat positif n, berlaku :

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(n+1)^2}{2}$$

"Bukti"

1) *Langkah Dasar* : rumus benar untuk $n = 1$.

2) *Langkah Induksi* : Asumsikan bahwa $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{(n+1)^2}{2}$

Dengan menggunakan hipotesis induksi, diperoleh

$$1 + 2 + 3 + ... + n + n + 1 = \frac{(n+1)^2}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + \frac{1}{4}}{2} + n + 1$$

$$= \frac{n^2 + 3n + \frac{9}{4}}{2} = \frac{\left(n + \frac{3}{2}\right)^2}{2} = \frac{\left((n+1)+1\right)^2}{2}.$$

3) *Kesimpulan*

Jadi, rumus terbukti benar untuk setiap bilangan bulat positif n.

b. Tunjukkan apa yang salah pada "pembuktian" "teorema" berikut .

"Teorema" : Untuk setiap bilangan bulat positif n, jika x dan y adalah bilangan bulat positif dengan maksimum $(x, y) = n$, maka $x = y$.

"Bukti"

1) *Langkah Dasar*

Misalkan bahwa $n = 1$. Jika maksimum $(x, y) = 1$ dan x dan y ádalah bilangan bulat positif, maka $x = 1$ dan $y = 1$.

2). *Langkah Induksi*

Sekarang misalkan k adalah bilangan bulat positif. Asumsikan bahwa jika maksimum $(x, y) = k$, maka $x = y$. Misalkan maksimum $(x, y) = k + 1$ dengan x dan y adalah bilangan bulat positif. Maka maksimum $(x – 1, y – 1) = k$.

3) *Kesimpulan*

Jadi, dengan hipotesis induksi diperoleh $x – 1 = y – 1$. Diperoleh bahwa $x = y$.

Subbab 3.2 Prinsip Induksi Matematis Kuat

Kegiatan 3.2.1 Prinsip Induksi Matematis Kuat

Prinsip Induksi matematis yang disajikan di atas merupakan prinsip induksi matematis yang umum. Berikut akan disajikan suatu prinsip induksi yang lain, yang disebut dengan **prinsip induksi matematis kuat**.

Prinsip induksi matematis kuat ini perlu dikembangkan karena ternyata, dengan prinsip induksi matematis yang ada tersebut, terdapat beberapa pernyataan benar yang tidak bisa dibuktikan.

Ayo Mengamati

Contoh 3.11

Perhatikan barisan bilangan x_n yang didefinisikan dengan:

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$ untuk semua bilangan asli n. Akan ditunjukkan bahwa $1 \le x_n \le 2$ untuk semua bilangan asli n.

Dari definisi barisan tersebut, maka kita akan memperoleh barisan bilangan

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) = 1,5$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + x_2) = 1,5\ \frac{1}{2}(1,5 + 2) = 1,75$$

$$x_5 = \frac{1}{2}(x_4 + x_3) = \frac{1}{2}(1,5 + 1,75) = 1,625$$

dan seterusnya.

Kalau kita membuktikan dengan induksi matematis, maka untuk langkah dasar dengan mudah dilakukan, yaitu untuk $n = 1$, maka $1 \leq x_1 = 1 \leq 2$.

Jadi pernyataan $1 \leq x_n \leq 2$ benar untuk n = 1.

Yang menjadi masalah sekarang adalah bagaimana membuktikan pada langkah induksi, yaitu untuk setiap bilangan asli k, jika $1 \leq x_n \leq 2$ benar untuk $n = k$, apakah pernyataan itu juga benar untuk $n = k + 1$.

Mari kita amati penjelasan berikut.

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan benar untuk $n = k$, yakni $1 \leq x_n \leq 2$.

Untuk menunjukkan bahwa $1 \leq x_{k+1} \leq 2$ atau $1 \leq x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k) \leq 2$ kita

tidak bisa hanya memanfaatkan fakta yang dimisalkan $1 \leq x_k \leq 2$ di atas.

x_k memang di antara 1 dan 2, tetapi apakah bisa dijamin bahwa x_{k-1} juga di antara 1 dan 2.

Agar terjamin bahwa $1 \leq x_{k+1} \leq 2$, maka di samping dimisalkan bahwa $1 \leq x_k \leq 2$, maka juga harus dimisalkan bahwa suku sebelumnya berlaku, yaitu $1 \leq x_{k-1} \leq 2$.

Inilah yang membedakan dengan Induksi matematis dan disebut dengan induksi matematis kuat.

Ayo Menanya

Kalau Anda sudah membaca Contoh 3.11 di atas, tentunya Anda pasti ingin tahu tentang apa induksi kuat itu.

Sekarang, tuliskan pertanyaan Anda pada tempat yang disediakan berikut yang berkenaan dengan induksi kuat.

Ayo Menggali Informasi

Mudah-mudahan Anda semua mempertanyakan

1. Apa induksi matematis kuat itu?
2. Apa bedanya induksi matematis kuat dengan induksi matematis?
3. Apakah induksi matematis kuat ekuivalen dengan induksi matematis?

Seperti dijelaskan pada contoh 3.11., induksi matematis tidak dapat digunakan dalam membuktikan masalah tersebut, karena pada induksi matematis langkah induksi, pemisalan yang dilakukan hanya pada kebenaran $P(k)$. Sedangkan dalam pembuktian tersebut tidak hanya cukup diperlukan kebenaran $P(k)$, melainkan juga diperlukan kebenaran $P(k - 1)$. Mungkin juga untuk masalah lain, dalam membuktikan kebenaran $P(k + 1)$ pada langkah induksi, kita memerlukan pemisalan kebenaran $P(n)$ untuk semua n mulai dari 1 sampai dengan k. Dengan kata lain dalam membuktikan kebenaran $P(k + 1)$, kita memerlukan asumsi kebenaran $P(1)$, $P(2)$, ..., sampai dengan $P(k)$. Prinsip inilah yang kita sebut dengan induksi matematis kuat, seperti diberikan berikut.

Prinsip Induksi Kuat

Misalkan P(n) adalah suatu pernyataan dimana kebenarannya ditentukan oleh nilai n. Jika P(n) memenuhi dua hal berikut, yaitu:

1. *P(1) benar,*
2. *Untuk setiap bilangan asli k, jika P(1), P(2), ..., P(k-1), P(k) bernilai benar maka P(k+1) juga bernilai benar*

Maka P(n) bernilai benar untuk setiap bilangan asli .

Secara intuisi, kita dapat menggambarkan induksi matematis kuat ini sebagai berikut.

Dari sifat (1) kita mempunyai $P(1)$ benar.

Dengan $P(1)$ benar dan sifat (2): untuk setiap bilangan asli k, jika $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k - 1)$, $P(k)$ bernilai benar maka $P(k + 1)$ juga bernilai benar, maka diperoleh $P(2)$ benar.

Sehigga kita mempunyai $P(1)$ dan $P(2)$ benar.

Dengan menggunakan kembali sifat (2): untuk setiap bilangan asli k, jika $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k-1)$, $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar, maka diperoleh $P(3)$ benar.

Dengan demikian kita mempunyai $P(1)$, $P(2)$, dan $P(3)$ benar.

Lebih lanjut kita gunakan tabel untuk melihat kesimpulan yang diperoleh.

Diketahui	Prinsip Induksi kuat	Kesimpulan
$P(1)$ benar	Sifat 2: $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k-1)$, $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar	$P(1)$ dan $P(2)$ benar
$P(1)$ dan $P(2)$ benar	Sifat 2	$P(1)$, $P(2)$, dan $P(3)$ benar
$P(1)$, $P(2)$, dan $P(3)$ benar	Sifat 2	$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, dan $P(4)$ benar
$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, dan $P(4)$ benar	Sifat 2	$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, dan $P(5)$ benar
$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, dan $P(5)$ benar	Sifat 2	$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, dan $P(6)$ benar
$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, dan $P(6)$ benar	Sifat 2	$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, dan $P(7)$ benar
$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, dan $P(7)$ benar	Sifat 2	$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, dan $P(8)$ benar

Apabila kita melakukannya terus menerus, maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan asli n.

Dengan intuisi di atas, dapat kita katakan bahwa induksi matematis kuat ekuivalen dengan induksi matematis.

Catatan:

Induksi matematis kuat ini dapat diperluas juga seperti pada induksi matematis, yaitu untuk n yang dimulai dari 1 dapat diperluas untuk n yang dimulai dari m suatu bilangan asli yang lebih dari 1.

Dengan memperhatikan prinsip induksi matematis yang diperluas, tuliskan prinsip induksi matematis kuat yang diperluas dalam tempat berikut.

Prinsip Induksi Matematis Kuat Yang Diperluas

Ayo Menalar

Dari informasi yang telah Anda peroleh, sekarang Anda membentuk kelompok berpasangan dengan teman sebelah untuk mendiskusikan pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Bagaimana langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi kuat bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n?
2. Bagaimana langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$, untuk suatu bilangan asli m?

Tuliskan hasil diskusi kelompok Anda dalam kotak berikut.

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ untuk suatu bilangan asli m adalah sebagai berikut:

Ayo Mengomunikasikan

Setelah Anda melakukan diskusi kelompok dan menuliskan hasilnya, selanjutnya kelompok Anda saling berkunjung dengan kelompok lain untuk mendiskusikan hasil yang telah diperoleh. Tuliskan secara individu, hasil diskusi saling kunjung sebagai suatu kesimpulan yang telah diperoleh untuk menjawab dua pertanyaan di atas.

Kesimpulan

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n adalah sebagai berikut:

Kesimpulan

Langkah-langkah suatu bukti dengan menggunakan prinsip induksi matematis kuat yang diperluas bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \geq m$ untuk suatu bilangan asli m adalah sebagai berikut:

Kegiatan 3.2.2 Penerapan Prinsip Induksi Matematis Kuat

Ayo Mengamati

Tentu Anda masih ingat penggunaan prinsip induksi matematis dalam membuktikan pernyataan yang berkenaan dengan bilangan asli. Sekarang silakan Anda amati penggunaan prinsip induksi matematis kuat pada Contoh 3.11 di atas, yaitu:

Barisan bilangan x_n didefinisikan dengan: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$

untuk semua bilangan asli n. Tunjukkan bahwa $1 \le x_n \le 2$ untuk semua bilangan asli n.

Bukti

Misalkan $P(n) : 1 \le x_n \le 2$ untuk bilangan asli n.

1. Langkah Dasar

Untuk n = 1, maka $1 \le x_1 = 1 \le 2$ bernilai benar. Jadi $P(1)$ benar.

2. Langkah Induksi

Untuk setiap bilangan asli k, misalkan $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k + 1)$, $P(k)$ benar. Akan ditunjukkan $P(k+1) : 1 \le x_{k+1} \le 2$ bernilai benar.

Dari $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(k - 1)$, $P(k)$ benar, maka $1 \le x_n \le 2$ untuk n = 1, 2, ..., k – 1, k, khususnya $1 \le x_k \le 2$ dan $1 \le x_{k-1} \le 2$. Akibatnya $2 \le (x_k + x_{k-1}) \le 4$. Dengan definisi barisan di atas, diperoleh $1 = \frac{2}{2} \le x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) \le \frac{4}{2} = 2$

Ini mengatakan bahwa $P(k+1) : 1 \le x_{k+1} \le 2$ bernilai benar.

3. Kesimpulan

$P(n) : 1 \le x_n \le 2$ benar untuk semua bilangan asli n.

Contoh 3.12

Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat n yang lebih dari satu habis dibagi oleh suatu bilangan prima.

Bukti

Misalkan $P(n)$ bilangan bulat positif n lebih dari satu habis dibagi oleh suatu bilangan prima.

1. *Langkah Dasar*

Jelas bahwa 2 habis dibagi oleh suatu bilangan prima, yaitu 2 itu sendiri. Jadi $P(2)$ bernilai benar.

2. *Langkah Induksi*

Untuk setiap bilangan asli $k > 1$, misalkan $P(2)$, $P(3)$, ..., $P(k - 1)$, $P(k)$ bernilai benar. Artinya semua bilangan bulat postif yang lebih dari satu sampai dengan bilangan asli k, habis dibagi oleh suatu bilangan prima.

Akan dibuktikan bahwa $P(k + 1)$ bernilai benar. Artinya bilangan asli $k + 1$ habis dibagi oleh suatu bilangan prima.

Perhatikan bilangan asli $k + 1$. Terdapat dua kemungkinan untuk bilangan ini.

a. $k + 1$ adalah suatu bilangan prima, sehingga ia (k + 1) habis dibagi oleh bilangan prima $k + 1$ itu sendiri.

b. $k + 1$ bukan suatu bilangan prima. Maka $k + 1$ dapat difaktorkan menjadi hasil kali dua bilangan asli yang lebih dari satu dan kurang atau sama dengan k, yaitu $k + 1 = k_1 \times k_2$ dengan $1 < k_1, k_2 \leq k$.

   Dengan menggunakan pemisalan bahwa semua bilangan bulat postif yang lebih dari satu dan kurang atau sama dengan k habis dibagi oleh suatu bilangan prima, sedangkan $1 < k_1, k_2 \leq k$ maka

   k_1 habis dibagi oleh suatu bilangan prima, misalkan $p_{1,}$

   dan juga k_2 habis dibagi oleh suatu bilangan prima, misalkan p_2.

   Dengan demikian, $k_1 = p_1 \times n_1$ dan $k_2 = p_2 \times n_2$ dan untuk suatu bilangan asli n_1, n_2. Oleh karena itu, diperoleh $k + 1 = k_1 \times k_2 = p_1 \times n_1 \times p_2 \times n_2$. Ini berarti $k + 1$ habis dibagi oleh suatu bilangan prima p_1 atau p_2.

Dari dua kemungkinan ini, dapat disimpulkan $k + 1$ habis dibagi oleh suatu bilangan prima. Hal ini sama dengan mengatakan bahwa $P(k - 1)$ bernilai benar.

3. *Kesimpulan*

$P(n)$: setiap bilangan bulat positif n lebih dari satu habis dibagi oleh suatu bilangan prima.

Ayo Menanya

Setelah Anda mengamati dengan cermat langkah-langkah pembuktian pada induksi matematis kuat (Contoh 3.11 dan 3.12), kemudian Anda bandingkan dengan langkah-langkah pembuktian pada induksi matematis (Contoh 3.8, 3.9, dan 3.10).

Sekarang Anda bekerja secara berkelompok (3 – 4 orang) dan buatlah pertanyaan-pertanyaan yang berkenaan dengan induksi matematis dan induksi matematis kuat. Tuliskan pertanyan-pertaanyaan itu pada tempat kosong berikut.

Ayo Menggali Informasi

Setelah Anda membuat pertanyaan, cobalah Anda mencoba menjawab pertanyaan tersebut.

Ayo Menalar

Sekarang saatnya Anda secara berkelompok mendiskusikan dan menjawab pertanyaan berikut.

1. Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematis?
2. Bagaimana langkah-langkah pembuktian dengan induksi matematis kuat?
3. Kapan kita menggunakan prinsip induksi matematis dan kapan kita menggunakan induksi matematis kuat?

Tuliskan jawaban pertanyaan-pertanyaan untuk masing-masing kelompok. Mintalah bantuan gurumu apabila Anda menemukan kesulitan atau permasalahan yang berkenaan dengan pertanyaan tersebut.

Ayo Mengomunikasikan

Setelah diskusi kelompok Anda lakukan, sekarang coba Anda diskusikan secara klasikan untuk mencocokkan jawaban kelompok yang telah Anda buat. Mintalah masukan atau penjelasan dari gurumu apabila dalam diskusi kelas menemukan permasalahan.

Setelah diskusi kelas, tuliskan kesimpulan Anda tentang hasil diskusi kelas tersebut secara individu dalam kotak berikut.

Kesimpulan

Latihan 3.2

1. a. Apakah kalian dapat membuktikan pernyataan $n^4 - n^2$ habis dibagi 12 untuk semua bilangan asli n dengan menggunakan induksi matematis seperti biasanya ?

   b. Cobalah untuk membuktikan pernyataan $n^4 - n^2$ habis dibagi 12 untuk semua bilangan asli n dengan menggunakan induksi matematis kuat.

2. Buktikan hasil-hasil berikut dengan menggunakan induksi kuat

   a. Misalkan $x_0 = 1, x_1 = 2, x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 4x_{n-1}}{12}$ dengan n adalah bilangan asli.

   Buktikan : $x_{n+1} \leq 1$, untuk semua bilangan asli n.

   b. Misalkan $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ dengan n adalah bilangan asli.

   Buktikan : $x_{n+1} \leq 2^n$, untuk semua bilangan asli n.

   c. $x + y$ adalah faktor dari $x^{2n} - y^{2n}$, untuk setiap bilangan asli n.

   d. Misalkan barisan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ didefinisikan sebagai berikut.

   $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, dan $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$. Buktikan bahwa $a_n < 2^n$.

3. Perhatikan kembali barisan Fibonacci:

   1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …

   di mana dua suku pertama adalah 1 dan 1, dan sebarang suku selanjutnya adalah jumlah dua suku sebelumnya. Kita menyatakan suku ke-n dari barisan ini sebagai F_n. Jadi, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, dan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

   Buktikan suku ke-n barisan ini dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai $F_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^n - \left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^n}{\sqrt{5}}$, untuk semua n bilangan asli.

   (**Amati**: suku-suku barisan Fibonacci merupakan bilangan Asli, tapi dalam rumus tersebut memuat bilangan irasional $\sqrt{5}$, mungkinkah?). Dalam matematika, dapat terjadi sesuatu yang kelihatannya secara intuisi) tidak mungkin, namun dapat terjadi.

Pengayaan

Proyek

Kegiatan

Kerjakan Tugas berikut secara berkelompok (3 – 4) orang, kemudian laporkan hasilnya dalam bentuk tertulis.

1. Barisan Terbatas

Pada Contoh 3.11 telah ditunjukkan bahwa barisan bilangan x_n yang didefinisikan dengan: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$ untuk semua bilangan asli *n*, yang memenuhi $1 \le x_n \le 2$ untuk semua bilangan asli *n*. Barisan bilangan tersebut adalah: 1; 2; 1,5; 1,75; 1,625; ...; ...

a. Tentukan suku ke-6 barisan tersebut.

b. Apakah barisan tersebut mempunyai suku terkecil? Sebutkan.

c. Apakah barisan tersebut mempunyai suku terbesar? Sebutkan.

d. Ingat kembali pengertian barisan pada buku sebelumnya (buku SMP). Apakah pengertian barisan pada Buku SMP dapat diterapkan pada barisan di atas. Bila tidak dapat diterapkan, carilah pengertian barisan di buku lain yang lebih "*make sense*".

e. Bagaimanakah perilaku suku-suku barisan tersebut setelah suku ke-2?

f. Apakah ada suku barisan yang lebih dari 2? Mengapa demikian?

Barisan tersebut merupakan contoh ***barisan terbatas***.

Proyek

Kegiatan

Buatlah tulisan sekitar 1 halaman berkaitan dengan barisan terbatas. Tulisanmu diantaranya berisi: contoh-contoh barisan terbatas, pengertian barisan terbatas, pengertian barisan tidak terbatas dan contoh-contohnya.

2. Barisan Monoton

a. Perhatikan barisan bilangan real x_n yang didefinisikan dengan $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + 3)$ untuk semua n bilangan asli.

i. Tuliskan tujuh suku pertama dari barisan tersebut.

ii. Tunjukkan bahwa:

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$.

2). $x_n \leq x_{n+1}$ untuk semua n bilangan asli.

Barisan x_n tersebut merupakan contoh **barisan monoton naik**.

b. Perhatikan barisan bilangan real x_n yang didefinisikan dengan $x_1 = 8$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2$ untuk semua n bilangan asli.

i. Tuliskan tujuh suku pertama dari barisan tersebut.

ii. Tunjukkan bahwa:

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$.

2) $x_{n+1} \geq x_{n+1}$ untuk semua n bilangan asli.

Barisan x_n tersebut merupakan contoh **barisan monoton turun**.

Barisan x_n dikatakan barisan monoton apabila ia barisan monoton naik atau monoton turun.

Proyek

Kegiatan

Buatlah tulisan tentang barisan mononton yang meliputi: definisi barisan monoton naik, barisan monoton turun, barisan monoton, contoh-contoh tentang barisan yang monoton dan yang tidak monoton.

3. Masalah eksistensi atau keujudan limit barisan

a. Amati barisan bilangan x_n yang didefinisikan oleh:
$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + x_1}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ untuk semua bilangan asli *n*.

i. Tentukan suku ke-2, ke-3, dan ke-4 barisan tersebut.

ii. Apakah barisan tersebut mempunyai suku terkecil? Sebutkan.

iii. Apakah barisan tersebut mempunyai suku terbesar? Jelaskan.

iv. Buatlah pendugaan (*conjecture*) tentang keterbatasan barisan tersebut. Apakah barisan tersebut terbatas.

v. Apakah barisan tersebut naik?

Barisan bilangan x_n di atas yang dinyatakan dalam:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$$

Untuk menentukan nilai bilangan tersebut, kita lakukan langkah beri nama x, lakukan operasi aljabar pada *x*, yakni:

$$x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}$$

Kemudian kuadratkan, didapat persamaan kuadrat $x^2 = 2 + x$, selesaikan, diperoleh $x = 2$.

Permasalahan: apakah langkah yang telah kita lakukan tersebut benar atau valid?, jelaskan.

b. Perhatikan barisan y_n yang didefinisikan oleh:

$y_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$ untuk semua bilangan cacah n.

Untuk menentukan nilai bilangan tersebut, kita lakukan langkah beri nama y, lakukan operasi aljabar pada y, yakni:

$$y = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots \ (*)$$

Kalikan ke dua ruas (*) dengan 2, didapat:

$$2y = \ 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

Kurangi ke dua ruas (*) dengan 1, didapat:

$$y - 1 = \ 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

Ternyata diperoleh $2y = y - 1$. Jadi $y = -1$. Didapat hasil yang tidak valid. Dimana letak kesalahan bernalarnya?, jelaskan.

4. Teorema Keujudan limit barisan.

Setiap barisan yang naik atau turun (salah satu) dan terbatas, mempunyai limit. (Bukti teorema ini diberikan pada Tahun ke-2 Perkuliahaan di Jurusan Matematika).

Buktikan bahwa:

a. Barisan x_n pada proyek 3 di atas naik dan terbatas, sehingga keujudan bilangan tersebut dijamin oleh Teorema keujudan limit barisan.

b. Barisan y_n pada proyek 3 di atas adalah naik dan tidak terbatas.

Bab 4

Diagonal Bidang, Diagonal Ruang, Bidang Diagonal, dan Penerapannya

Kompetensi Dasar Dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1.1 Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya 2.1 Menghayati perilaku disiplin, sikap kerjasama, sikap kritis dan cermat dalam bekerja menyelesaikan masalah kontekstual. 2.2 Memiliki dan menunjukkan rasa ingin tahu, motivasi internal, rasa senang dan tertarik dan percaya diri dalam melakukan kegiatan belajar ataupun memecahkan masalah nyata. 3.6 Menganalisis konsep dan sifat diagonal ruang, diagonal bidang, dan bidang diagonal dalam bangun ruang dimensi tiga serta menerapkannya dalam memecahkan masalah. 4.6 Menggunakan berbagai prinsip dan sifat diagonal ruang, diagonal bidang, dan bidang diagonal dalam bangun ruang dimensi tiga serta menerapkannya dalam memecahkan masalah.	Melalui pembelajaran diagonal ruang, diagonal bidang, dan bidang diagonal siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengidentifikasikan diagonal ruang, diagonal bidang, dan bidang diagonal dalam bangun ruang dimensi tiga. 2. Menemukan sifat diagonal ruang, diagonal bidang, dan bidang diagonal dalam ruang dimensi tiga. 3. Menerapkan konsep dan sifat diagonal ruang, diagonal bidang, dan bidang diagonal dalam memecahkan masalah.

Biografi Euclid

Sumber: The Britannica Guide To Geometry

Euclid merupakan seorang matematikawan yang hidup sekitar tahun 300 SM di Alexandria dan sering disebut sebagai "Bapak Geometri". Dialah yang mengungkapkan bahwa:

1. titik adalah 1 dimensi
2. garis adalah 1 dimensi yaitu garis itu sendiri
3. persegi dan bangun datar lainnya adalah 2 dimensi yaitu panjang dan lebar
4. bangun ruang adalah 3 dimensi yaitu panjang lebar tinggi
5. tidak ada bangun geometri 4 dimensi

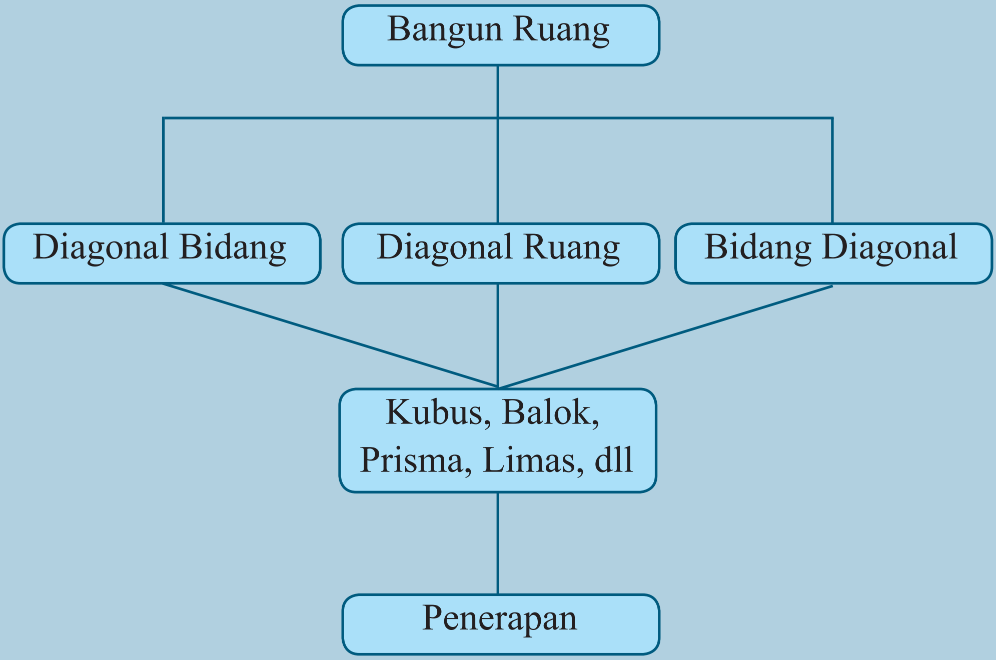
Dalam bukunya " *The Element* ", ia menyatakan 5 *postulat* yang menjadi landasan dari semua teorema yang ditemukannya. Semua *postulat* dan teorema yang beliau ungkapkan merupakan landasan teori tentang kedudukan titik, garis, dan bidang dalam ruang yang hingga kini masih digunakan dengan hampir tanpa perubahan yang prinsipil. **Euclid** menulis 13 jilid buku tentang geometri. Dalam buku-bukunya ia menyatakan *aksioma* (pernyataan-pernyataan sederhana) dan membangun semua dalil tentang geometri berdasarkan aksioma-aksioma tersebut. Contoh dari aksioma **Euclid** adalah, "***Ada satu dan hanya satu garis lurus, di mana garis lurus tersebut melewati dua titik***". Buku-buku karangannya menjadi hasil karya yang sangat penting dan menjadi acuan dalam pembelajaran Ilmu Geometri. Bagi **Euclid**, matematika itu penting sebagai bahan studi dan bukan sekedar alat untuk mencari nafkah. Ketika ia memberi kuliah geometri pada seorang raja, baginda bertanya, "Tak adakah cara yang lebih mudah bagi saya untuk mengerti dalam mempelajari geometri?". Euclid menjawab, "Bagi raja tak ada jalan yang mudah untuk mengerti geometri. Setiap orang harus berpikir ke depan tentang dirinya apabila ia sedang belajar".

Sumber : Hosch, W.L. 2011. The Britannica Guide to Geometry. New York : Britannica Educational Publishing

Beberapa hikmah yang mungkin bisa kita petik, adalah :

1. Ilmu bukanlah sekedar alat untuk mencari nafkah dalam memenuhi kebutuhan hidup, tetapi untuk mencari nafkah seseorang harus mempunyai ilmu
2. Jalan pintas bukanlah suatu hal yang baik untuk seseorang yang memang benar-benar ingin belajar.

Peta Konsep


Bangun Ruang
Diagonal Bidang
Diagonal Ruang
Bidang Diagonal
Kubus, Balok,
Prisma, Limas, dll
Penerapan

Subbab 4.1 Diagonal Bidang dan Diagonal Ruang

Amatilah benda-benda di sekitar Anda. Dalam kehidupan sehari-hari mungkin Anda sering menjumpai kardus minuman, kardus mie instan, kotak makanan, kaleng susu dan lain-lain. Berbentuk apakah benda-benda tersebut?

Sekarang, cermatilah beberapa contoh berikut.

Contoh 4.1

Intan ingin membungkus kado yang berbentuk balok. Ia akan menambahkan pita yang dibentuk menyilang diantara ujung-ujung permukaan kado tersebut. Jika panjang balok adalah 40 cm dan lebarnya adalah 30 cm, berapakah panjang minimal pita yang dibutuhkan oleh Intan?

Contoh 4.2

Budi akan menghias suatu ruangan yang berbentuk kubus untuk acara ulang tahun seorang temannya. Ia menghias ruangan tersebut dengan pita dan balon. Ia ingin memasang pita melintang melalui ruangan dari pojok atas sampai pojok bawah ruangan. Jika ruangan tersebut berukuran 3 m × 3 m × 3 m, berapakah panjang pita yang diperlukan untuk menghias ruangan tersebut?

Contoh 4.3

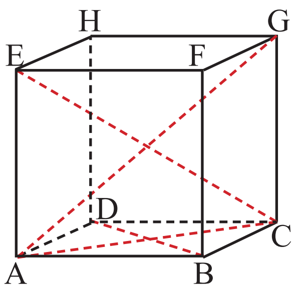
Pak Ujang sedang membuat kandang untuk marmut hewan peliharaannya. Ia membuat kandang berbentuk balok, tetapi kandang tersebut akan ia bagi menjadi dua bagian berbentuk prisma segitiga yang volume dan luasnya sama. Oleh karena itu, ia membuat pembatas ruangan dengan kayu triplek. Jika kandang tersebut berukuran 60 cm × 30 cm × 30 cm, berapakah ukuran kayu triplek tersebut?

Agar bisa menjawab masalah-masalah di atas, Anda perlu mempelajari materi pada bab ini. Sebelum mempelajari materi pada bab ini, Anda harus mengetahui tentang macam - macam bangun ruang serta teorema Pythagoras. Sebutkan macam-macam bangun ruang yang Anda ketahui dan sebutkan rumus Pythagoras.

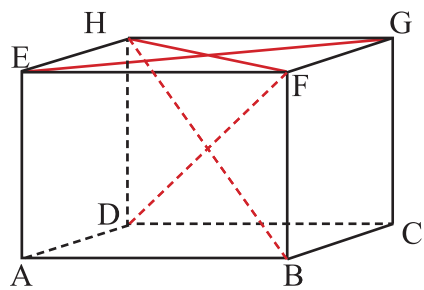
Kegiatan 4.1.1 Diagonal Bidang dan Diagonal Ruang

Ayo Mengamati

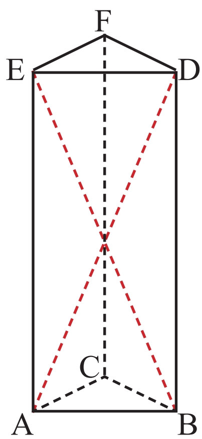
Amati gambar-gambar berikut ini.



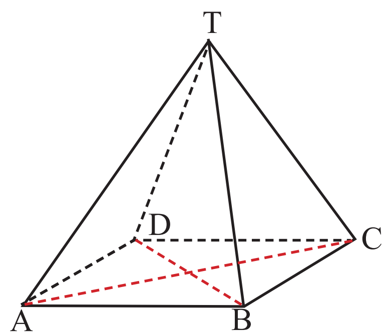
Gambar 4.1.1.1



Gambar 4.1.1.2



Gambar 4.1.1.3



Gambar 4.1.1.4

Perhatikan Gambar 4.1.1.1 di atas, ruas garis AC dan BD disebut diagonal bidang. Sedangkan AG dan EC disebut diagonal ruang. Pada Gambar 4.1.1.2, contoh diagonal bidangnya adalah EG dan FH. Sedangkan contoh diagonal ruangnya adalah HB dan FD. Pada Gambar 4.1.1.3, AD dan BE disebut dengan diagonal bidang tegak prisma. Sedangkan pada Gambar 4.1.1.4, AC dan BD disebut dengan diagonal bidang alas limas. Amati bidang yang memuat ruas garis-ruas garis tersebut.

Ayo Menanya

Nah, berdasarkan informasi di atas, buatlah pertanyaan tentang diagonal bidang dan diagonal ruang pada tempat yang disediakan berikut. Usahakan pertanyaan Anda memuat kata-kata “ garis ”, “titik sudut” , “bidang”, “sama” dan “berlainan”.

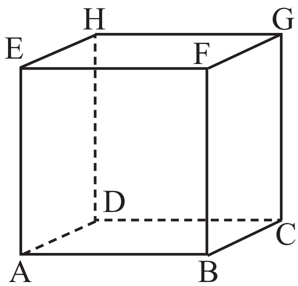
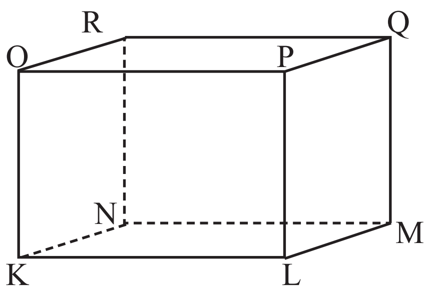
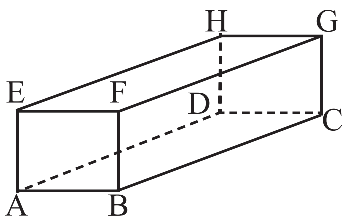
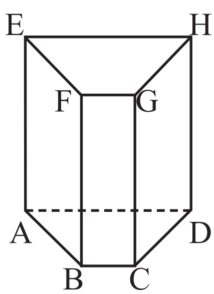
Ayo Menggali Informasi

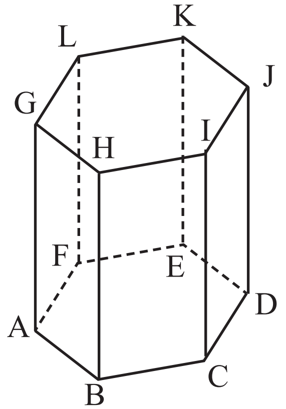
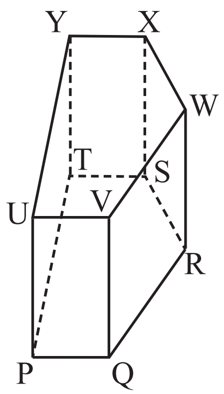
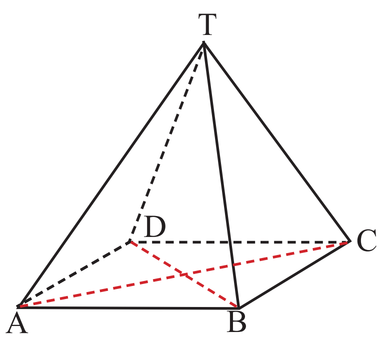
Dari sekian banyak pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut.

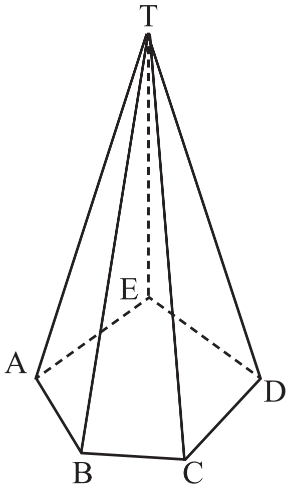
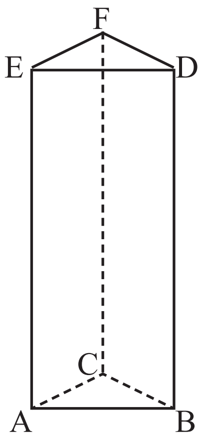
1. Apa yang dimaksud dengan diagonal bidang?
2. Apakah diagonal bidang selalu menghubungkan titik-titik sudut yang terletak pada bidang yang sama dan tidak merupakan rusuk bidang?
3. Apakah semua bangun ruang mempunyai diagonal bidang?
4. Apakah yang dimaksud dengan diagonal ruang?
5. Apakah diagonal ruang selalu menghubungkan titik-titik sudut yang terletak pada bidang yang berlainan?
6. Apakah semua bangun ruang mempunyai diagonal ruang?

Ayo Menalar

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, isilah tabel berikut ini.

<table>
<tr><th>No</th><th>Bangun Ruang</th><th>Diagonal Bidang</th><th>Diagonal Ruang</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

No	Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Diagonal Ruang
5			
6			
7			

No	Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Diagonal Ruang
8			
9			

Dari tabel di atas, adakah bangun ruang yang tidak mempunyai diagonal bidang? Adakah bangun ruang yang tidak mempunyai diagonal ruang? Jika ada, maka sebutkanlah bangun ruang-bangun ruang tersebut pada tempat yang sudah disediakan berikut ini.

Selanjutnya, menurut Anda adakah bangun ruang yang tidak memiliki diagonal bidang dan diagonal ruang? Jika ada maka sebutkanlah bangun ruang tersebut pada tempat berikut ini.

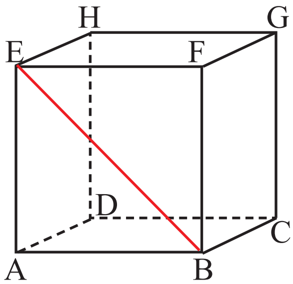
Dari proses menalar tersebut, tuliskan simpulan-simpulan awal atau dugaan awal tentang *apa itu diagonal bidang dan diagonal ruang*?

Ayo Mengomunikasikan

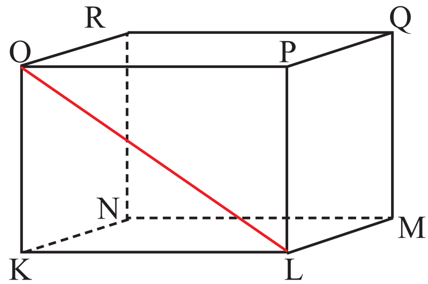
Tukarkan tulisan simpulan-simpulan awal tersebut dengan teman sebangku/ kelompok lainnya. Secara santun, silahkan saling berkomentar, menanggapi komentar, memberikan usul dan menyepakati ide-ide yang paling tepat.

Ayo Mengamati

Perhatikan gambar-gambar berikut ini.



Gambar 4.1.1.5

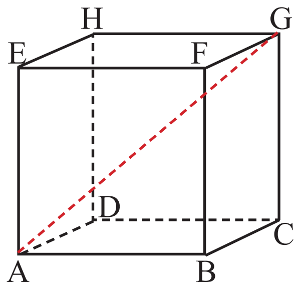


Gambar 4.1.1.6

Pada Gambar 4.1.1.5 di atas, ruas garis *BE* adalah salah satu diagonal bidang pada kubus *ABCD.EFGH*. Sedangkan pada Gambar 4.1.1.6, ruas garis *LO* adalah salah satu diagonal bidang balok *KLMN.OPQR*. Perhatikan bidang *ABFE* pada Gambar 4.1.1.5 dan bidang *KLPO* pada Gambar 4.1.1.6. Bidang *ABFE* berbentuk persegi dan siku-sikunya berada di titik *A, B, F*, dan *E*. Sedangkan bidang *KLPO* berbentuk persegi panjang dan siku-sikunya berada di titik *K, L, P*, dan *O*. Sekarang perhatikan segitiga *BAE* pada bidang *ABFE*, dan segitiga *KLO* pada bidang *KLPO*. Jika panjang rusuk *BA* atau *AE*, *KL* dan *KO* diketahui, dapatkah Anda menentukan panjang *BE* dan *LO*?

Untuk dapat menentukan panjang *BE* dan *LO* Anda harus tahu tentang teorema Pythagoras. Gunakanlah teorema Pythagoras untuk menentukan panjang *BE* dan *LO*. Tuliskanlah pada tempat berikut ini.

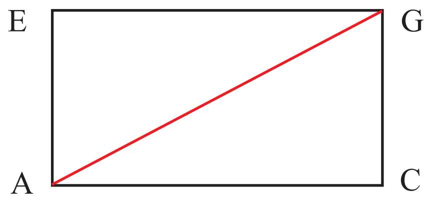
Sekarang perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 4.1.1.7

Pada Gambar 4.1.1.7 di atas, jika panjang rusuk AB atau BC diketahui, Anda dapat menentukan panjang diagonal ruang AG. Untuk dapat menentukan panjang diagonal tersebut, perhatikan uraian berikut ini.

Diagonal ruang AG merupakan diagonal ruang yang terletak pada bidang $ACGE$. Jika bidang tersebut digambarkan ulang akan diperoleh gambar berikut ini.



Gambar 4.1.1.8

Nyatakan AC dalam AG dan GC. Anda tentu telah mengetahui cara untuk menentukan panjang AC pada kubus tersebut. Perhatikan persegi panjang $ACGE$ di atas, salah satu siku-sikunya adalah di C. Pada segitiga ACG, gunakan kembali teorema Pythagoras untuk menentukan panjang AG. Tuliskanlah bagaimana menentukan panjang AG pada tempat berikut ini.

Apa yang telah Anda kerjakan merupakan cara untuk menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada kubus, bagaimana untuk menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada bangun ruang yang lain? Dapatkah Anda menentukannya?

Ayo Menanya

Berdasarkan pengamatan di atas, buatlah pertanyaan yang memuat kata-kata " panjang " , "diagonal bidang", dan "diagonal ruang" di tempat yang telah disediakan.

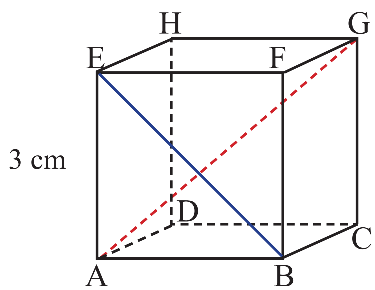
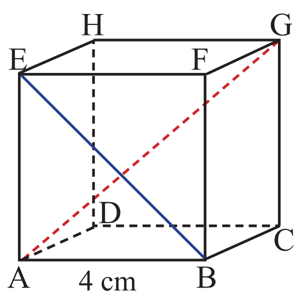
Ayo Menggali Informasi

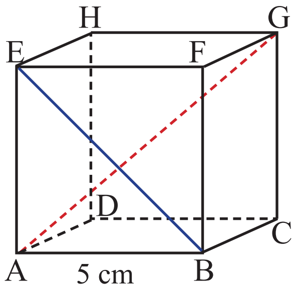
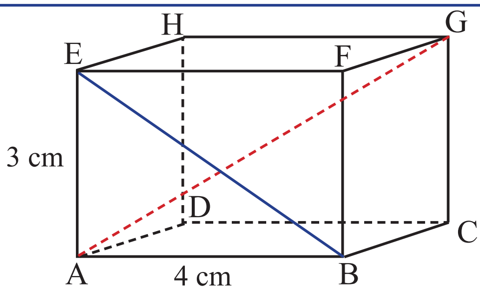
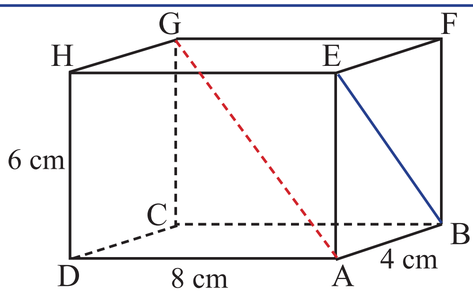
Diantara pertanyaan-pertanyaan tersebut, mungkin ada pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

1. Bagaimana cara menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada kubus?
2. Bagaimana cara menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada balok?
3. Bagaimana cara menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada prisma?
4. Bagaimana cara menentukan panjang diagonal bidang alas pada limas?

Ayo Menalar

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, lengkapilah tabel berikut ini.

Bangun Ruang	Panjang BE	Panjang AG
		
		

Bangun Ruang	Panjang BE	Panjang AG
		
		
		

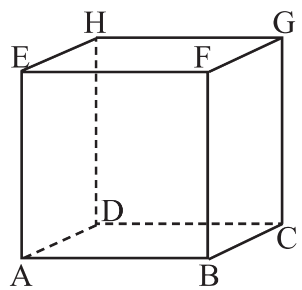
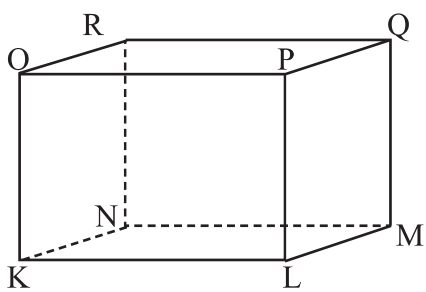
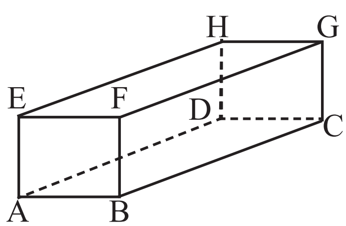
Kemudian jelaskan cara menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang pada suatu bangun ruang di tempat yang disediakan berikut.

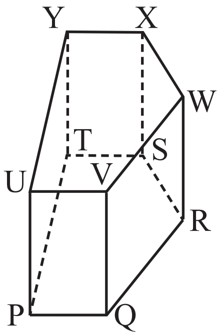
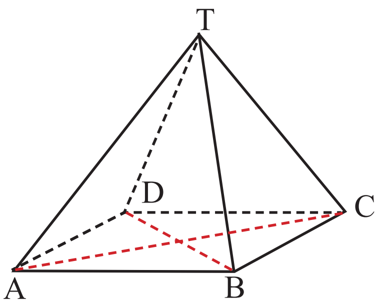
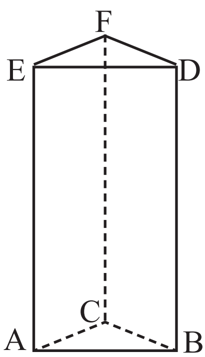
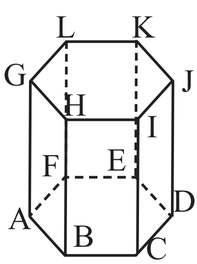
Ayo Mengomunikasikan

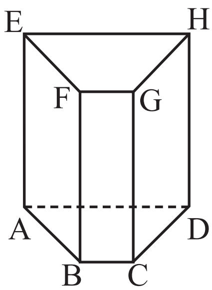
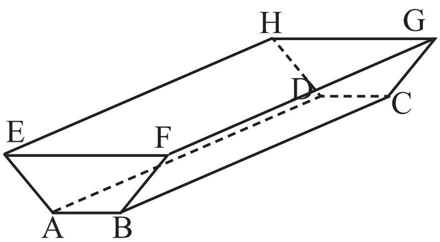
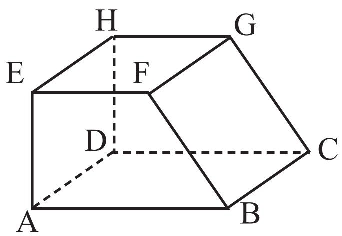
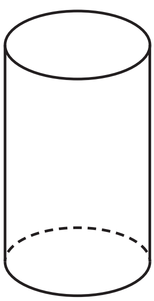
Diskusikan cara menentukan panjang diagonal bidang dan diagonal ruang tersebut pada teman sebangku Anda.

Latihan 4.1.1

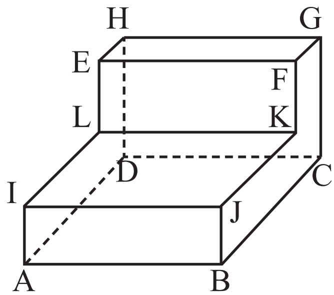
1. Isilah tabel berikut ini dengan tanda centang (√)

Bangun Ruang	Diagonal Bidang		Diagonal Ruang	
	Ada	Tidak ada	Ada	Tidak ada
				
				
				

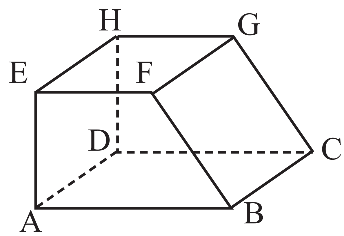
<table>
<tr><th rowspan="2">Bangun Ruang</th><th colspan="2">Diagonal Bidang</th><th colspan="2">Diagonal Ruang</th></tr>
<tr><th>Ada</th><th>Tidak ada</th><th>Ada</th><th>Tidak ada</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Bangun Ruang	Diagonal Bidang		Diagonal Ruang	
	Ada	Tidak ada	Ada	Tidak ada
				
				
				
				

2. Perhatikan bangun berikut ini.



Gambar 1



Gambar 2

a. Pada Gambar 1, jika diketahui panjang $AB = BC = CG = 4$ cm, $JK = 3$ cm, dan $BJ = 1$ cm hitunglah panjang AC, AK, dan LG.

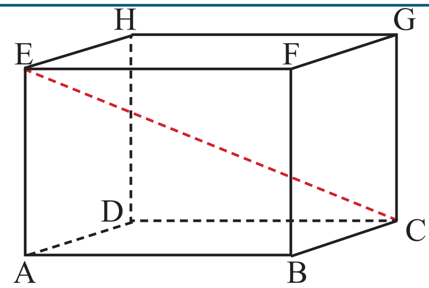
b. Pada Gambar 2, jika diketahui panjang $AB = 5$ cm, $AE = BC = EF = 4$ cm hitunglah panjang AC, EG, DF, dan AG.

3. Perhatikan aquarium berikut ini.

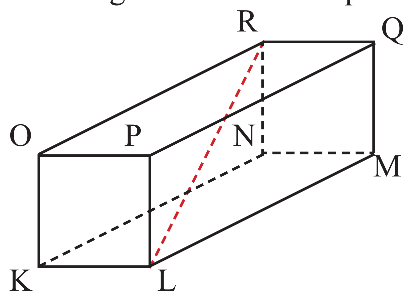
Sumber: Big Ideas Math Advanced 1

Pada akuarium tersebut akan ditambahi hiasan yang digantungkan pada kawat yang dipasang di dalam aquarium melintang dari ujung atas ke ujung bawah. Tentukan panjang kawat yang diperlukan!

4. Dari gambar di samping, jika diketahui panjang AB = 8 cm, BC = 6 cm dan EC = $5\sqrt{5}$ berapakah luas segitiga AEC dan ABC?

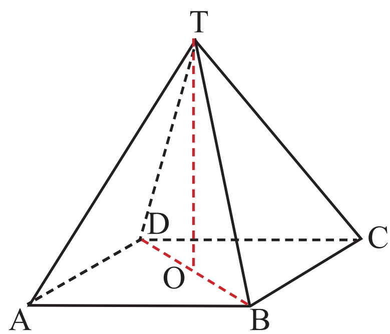


5. Ani akan membuat kerangka suatu balok seperti gambar berikut.



Jika panjang KL = 5 cm, LM = 10 cm, dan LR = $5\sqrt{6}$ cm, maka berapa kawat yang dibutuhkan Ani untuk membuat kerangka balok tersebut?

6. Diketahui limas $T.ABCD$ dengan alas berbentuk persegi seperti berikut.



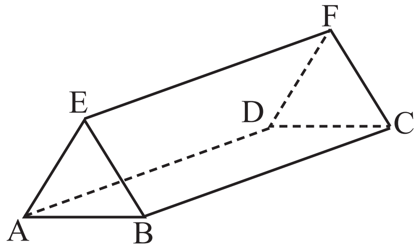
Panjang BD = $12\sqrt{2}$ cm dan TO = 8 cm. Tentukan

a. Luas segitiga TBC

b. Volume limas $T.\ ABCD$

7. Suatu kepanitian membuat papan nama dari kertas yang membentuk

bangun seperti berikut.



Ternyata ABE membentuk segitiga sama sisi, panjang BF = 13 cm dan BC = 12 cm. Berapakah ukuran kertas yang digunakan untuk membuat papan nama tersebut?

8. Balok dengan panjang diagonal ruang $20\sqrt{2}$ cm. Rusuk-rusuk balok tersebut bertemu pada suatu titik sudut dengan perbandingan 3 : 4 : 5. Berapa rusuk terpanjang dari balok tersebut?

9. Luas permukaan suatu kubus adalah 294 cm^2. Tentukan
   a. Panjang diagonal bidangnya
   b. Panjang diagonal ruangnya
   c. Volume kubus

10. Tentukan banyaknya diagonal bidang dan diagonal ruang pada bangun ruang berikut.
   a. Prisma segilima
   b. Prisma segidelapan

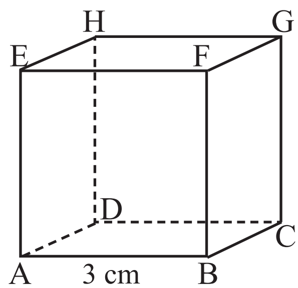
11. Suatu kubus panjang diagonal ruangnya adalah a cm. tentukan:
   a. Panjang rusuk kubus tersebut
   b. Panjang diagonal bidang kubus tersebut

Kegiatan 4.1.2 Sifat-sifat Diagonal Bidang dan Diagonal Ruang

Dari kegiatan sebelumnya Anda sudah mengenal dan dapat menentukan diagonal bidang dan diagonal ruang pada suatu bangun ruang. Sekarang mulailah memperhatikan diagonal bidang dan diagonal ruang dari masing-masing bangun ruang tersebut.

Ayo Mengamati

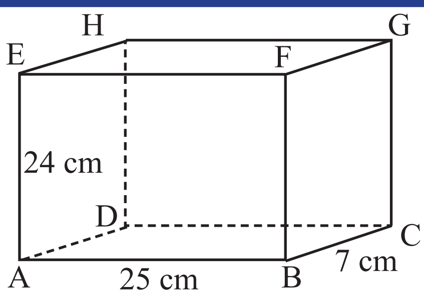
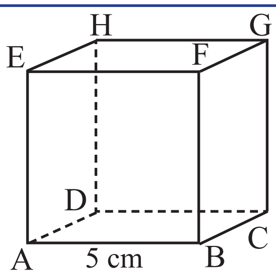
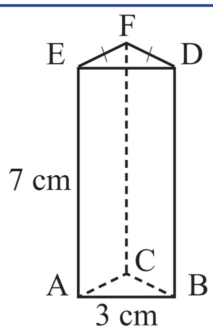
Perhatikan kubus *ABCD.EFGH* berikut ini



Anda tentu dapat menyebutkan semua diagonal bidang dan diagonal ruang pada kubus tersebut. Tuliskanlah semua diagonal bidang dan diagonal ruang tersebut pada tempat berikut ini.

Kemudian tentukan panjang tiap-tiap diagonal bidang dan diagonal ruang yang Anda sebutkan tadi.

Lakukan hal yang sama untuk bangun ruang-bangun ruang berikut ini.

Bangun Ruang	Diagonal Bidang	Panjang Diagonal Bidang	Diagonal ruang	Panjang Diagonal ruang
				
				
				

Dari hasil pengisian tabel di atas, pada tiap-tiap bangun ruang adakah diagonal bidang yang mempunyai panjang sama dengan diagonal bidang yang lain? Adakah diagonal ruang yang mempunyai panjang sama dengan diagonal ruang yang lain? Jika ada, sebutkanlah pada tempat berikut ini.

Hal itulah yang disebut sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang.

Ayo Menanya

Nah, berdasarkan informasi di atas, buatlah pertanyaan tentang sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang. Tuliskan pertanyaanmu di tempat berikut ini.

Ayo Menggali Informasi

Dari sekian banyak pertanyaan yang Anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Apa saja sifat diagonal bidang dan diagonal ruang pada kubus?
2. Apa saja sifat diagonal bidang dan diagonal ruang pada balok?
3. Apa saja sifat diagonal bidang dan diagonal ruang pada prisma?
4. Apa saja sifat diagonal bidang alas pada limas?

Ayo Menalar

Untuk dapat menjawab pertanyaan-pertanyaan di atas, telitilah bangun ruang-bangun ruang yang sudah Anda ketahui. Gambarkan bangun ruang yang Anda ketahui, tentukan ukuran bangun ruang tersebut, kemudian tentukan panjang semua diagonal bidang dan diagonal ruangnya (jika ada). Setelah itu buatlah kesimpulan mengenai sifat-sifat diagonal bidang dan diagonal ruang untuk tiap-tiap bangun ruang tersebut. Lakukan kegiatan-kegiatan tersebut pada tempat yang telah disediakan berikut ini.

Bangun Ruang, Ukuran, Panjang Diagonal Bidang dan Panjang Diagnoal Ruang

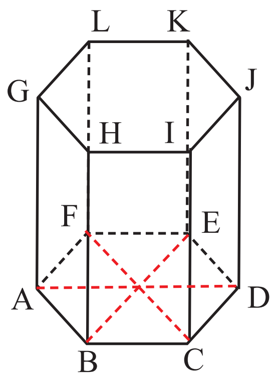
Kesimpulan

Ayo Mengomunikasikan

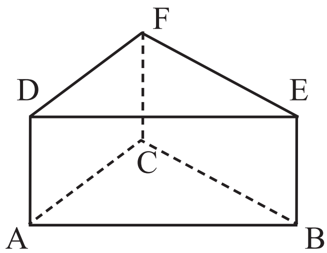
Presentasikan hasil pekerjaannmu ke depan kelas. Amati juga presentasi teman-teman sekelas Anda, kemudian bandingkan dengan hasil pekerjaan Anda.

Latihan 4.1.2

1. Diketahui limas segienam beraturan seperti berikut.
   Jika panjang diagonal bidang alas $BE = 16$ cm, dan tinggi prisma $DJ = 12$ cm tentukan
   a. Panjang AD
   b. Luas $ADEF$
   c. Volume prisma



2. Perhatikan gambar prisma di bawah ini.



   Jika diketahui panjang $AE = 17$ cm, dan $BC = 12$ cm serta tinggi prisma = 8 cm tentukan
   a. Panjang BD
   b. Luas ABD
   c. Volume prisma

3. Pada suatu kubus $ABCD.EFGH$ diketahui panjang diagonal ruang $AG = 6\sqrt{3}$ cm. Tentukan luas segitiga BDH dan ACE.

4. Lukis prisma trapesium sama kaki $KLMN.OPQR$. Dari gambar yang telah Anda lukis, sebutkan
   a. Diagonal bidang yang sama panjang
   b. Diagonal ruang yang sama panjang

5. Suatu balok memiliki panjang 5 cm, lebar 4 cm, dan volume 60 cm^3. Ukuran balok tersebut diperbesar sehingga panjangnya tiga kali panjang semula, lebarnya dua kali lebar semula, dan tingginya tetap. Bagaimana ukuran diagonal bidang dan diagonal ruang setelah diperbesar.

Proyek

Waktu : 7 hari

Materi : Bangun Ruang

Anggota kelompok : 3 orang.

Kegiatan

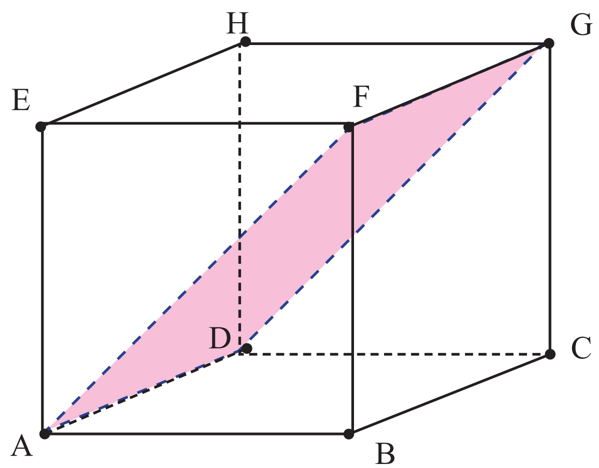
Buatlah suatu artikel yang berisi tentang aplikasi pengetahuan bangun ruang untuk teknik arsitektur bangunan. Kupaslah pengetahuan tentang apa saja yang berkaitan dengan bangun ruang yang perlu dimiliki oleh seorang arsitektur.

ARTIKEL

Subbab 4.2 Bidang Diagonal

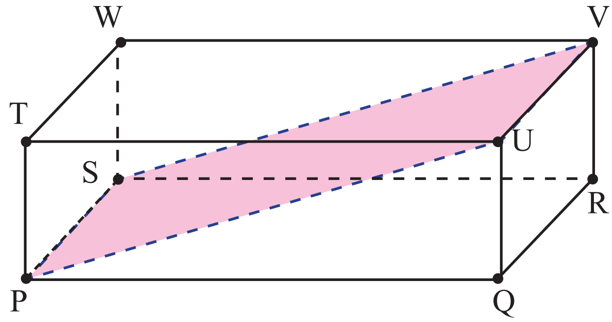
Ayo Mengamati

Perhatikan kubus *ABCD.EFGH* pada Gambar 4.2.1 secara seksama. Pada gambar tersebut, terlihat dua diagonal pada kubus *ABCD.EFGH* yaitu *AF* dan *DG*. Ternyata, diagonal bidang *AF* dan *DG* beserta dua rusuk kubus yang sejajar, yaitu *AD* dan *FG* yang membentuk suatu bidang di dalam ruang kubus bidang *ADGF* pada kubus *ABCD.EFGH*. Bidang *ADGF* disebut bidang diagonal. Coba Anda sebutkan bidang diagonal yang lain dari kubus *ABCD.EFGH*!



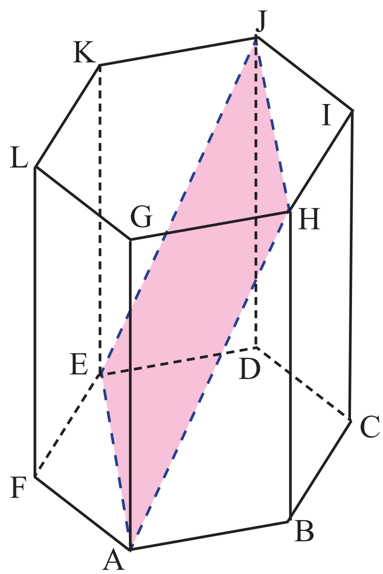
Gambar 4.2.1

Perhatikan balok *PQRS.TUVW* pada Gambar 4.2.2 secara seksama. Pada gambar tersebut, terlihat dua diagonal pada balok *PQRS.TUVW* yaitu *PU* dan *SV*. Ternyata, diagonal bidang *PU* dan *SV* beserta dua rusuk balok yang sejajar, yaitu *PS* dan *UV* yang membentuk suatu bidang di dalam ruang balok bidang *PUVS* pada balok *PQRS.TUVW*. Bidang *PUVS* disebut bidang diagonal. Coba Anda sebutkan bidang diagonal yang lain dari balok *PQRS.TUVW*!



Gambar 4.2.2

Perhatikan prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL* pada Gambar 4.2.3 secara seksama. Pada gambar tersebut, terlihat dua diagonal pada prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL* yang sejajar yaitu *AH* dan *EJ*. Kedua diagonal bidang *AH* dan *EJ* beserta dua garis *JH* dan *AE* membentuk suatu bidang di dalam ruang prisma segienam bidang *AEJH* pada prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL*. Bidang *BIKF* disebut bidang diagonal prisma segienam. Coba Anda sebutkan bidang diagonal yang lain dari prisma segienam *ABCDEF.GHIJKL*!



Gambar 4.2.3

Setelah Anda mencari bidang-bidang diagonal yang terdapat pada bangun ruang kubus, balok, dan prisma segienam beraturan, buatlah pertanyaan-pertanyaan terkait dengan definisi dan sifat-sifat bidang diagonal pada bangun ruang kubus, balok, dan prisma segienam beraturan. Mintalah kepada teman Anda untuk menyebutkan bidang-bidang diagonal pada bangun ruang kubus, balok, dan prisma segienam beraturan yang sudah ditemukan, Apabila sama dengan yang telah Anda temukan, identifikasi sifat-sifatnya. Mintalah bantuan guru untuk mengoreksi jawaban Anda.

Ayo Menanya

Setelah Anda melakukan kegiatan di atas, buatlah pertanyaan terkait bidang diagonal pada bangun ruang dan tuliskan pada kotak di bawah ini!

Ayo Menggali Informasi

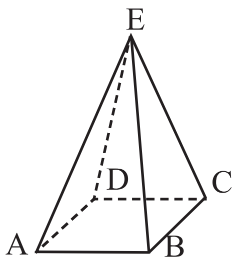
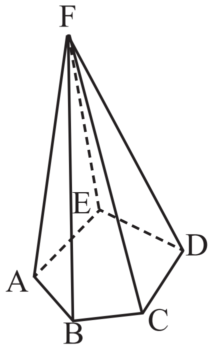
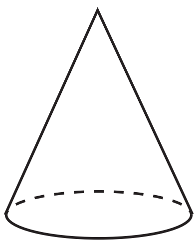
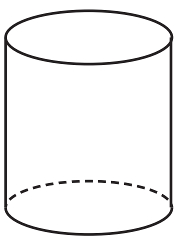
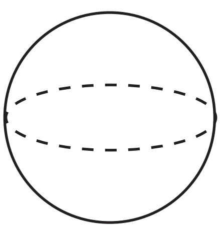
Dari sekian banyak pertanyaan yang Anda buat, mungkin terdapat beberapa pertanyaan-pertanyaan berikut

1. Apakah semua bangun ruang memiliki bidang diagonal?
2. Apakah semua bangun ruang prisma memiliki bidang diagonal?

Ayo Menalar

Contoh 4.4

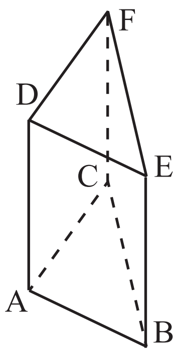
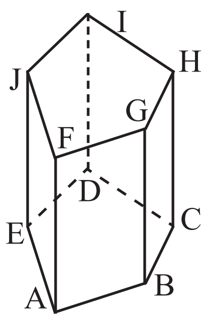
Coba Anda cari bidang-bidang diagonal pada bangun ruang limas segiempat, limas segilima, kerucut, tabung, dan bola. Bandingkan dengan bangun ruang kubus, balok, dan prisma segienam beraturan yang sudah Anda temukan bidang-bidang diagonalnya. Buat kesimpulan tentang bidang diagonal pada masing-masing bangun ruang tersebut.

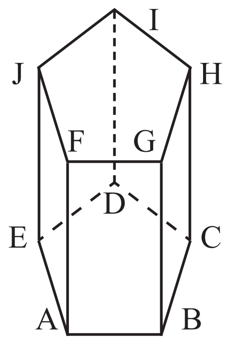
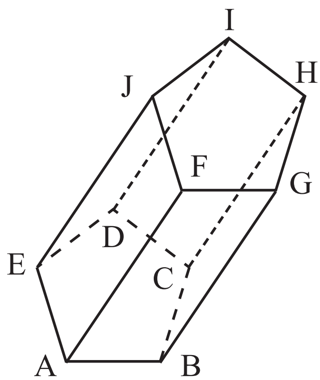
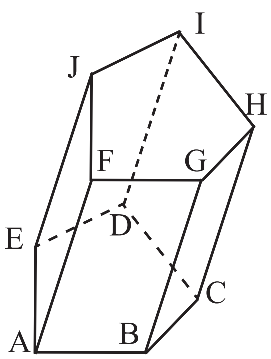
Bangun Ruang	Nama Bangun Ruang	Bidang Diagonal
	Limas Segiempat	
	Limas Segilima	
	Kerucut	
	Tabung	
	Bola	

Tuliskan kesimpulan Anda tentang bidang diagonal untuk masing-masing bangun ruang pada tempat di bawah ini!

Contoh 4.5

Coba Anda cari bidang-bidang diagonal dari bangun ruang prisma tegak segitiga, prisma tegak segilima tidak beraturan, prisma tegak segilima beraturan, prisma miring segilima beraturan, dan prisma miring segilima tidak beraturan, kemudian cari bidang-bidang diagonalnya. Bandingkan dengan bangun ruang prisma segienam beraturan yang sudah Anda temukan bidang-bidang diagonalnya. Buat kesimpulan bangun ruang prisma yang memiliki bidang diagonal.

Bangun Ruang	Nama Bangun Ruang	Bidang Diagonal
	Prisma tegak segitiga	
	Prisma tegak segilima tidak beraturan	

	Prisma tegak segilima beraturan	
	Prisma miring segilima beraturan	
	Prisma miring segilima tidak beraturan	

Tuliskan kesimpulan Anda tentang bangun ruang prisma yang memiliki bidang diagonal pada tempat di bawah ini!

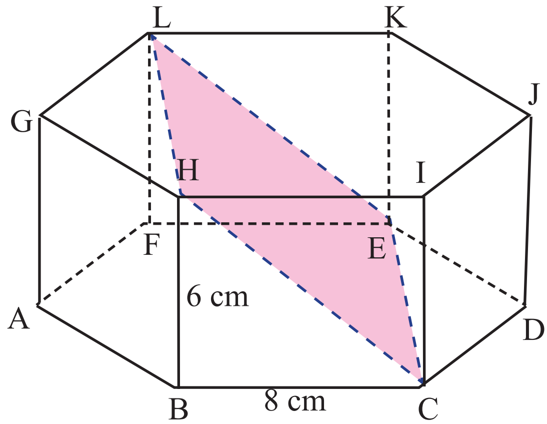
Setelah Anda mengerjakan tabel di atas, tuliskanlah definisi tentang bidang diagonal pada tempat di bawah ini!

Bagaimana dengan bidang diagonal pada limas segitiga? Gambar dan berikan pendapat Anda!

Selanjutnya, tuliskan sifat-sifat bidang diagonal pada bangun ruang kubus, balok, prisma segi-n beraturan, dan limas segi-n dengan $n > 3$ pada tempat di bawah ini!

Contoh 4.6

Perhatikan gambar prisma segienam di bawah ini. Tentukan luas bidang diagonal *CELH*!



Alternatif Penyelesaian

Sebelum menghitung luas bidang diagonal *CELH*, harus dihitung dahulu panjang diagonal bidang *CH*. Panjang diagonal bidang *CH* dapat dihitung dengan menggunakan Teorema Pythagoras.

$CH^2 = BC^2 + HB^2$

$CH^2 = 8^2 + 6^2$

$CH^2 = 64 + 36$

$CH^2 = 100$

$CH = \sqrt{100}$

$CH = 10$

Jadi, panjang diagonal bidang *CH* adalah 10 cm.

Luas bidang diagonal *CELH* = Luas persegipanjang *CELH*

= panjang x lebar

$= CH \times CE$

$= 10 \times 8$

$= 80$

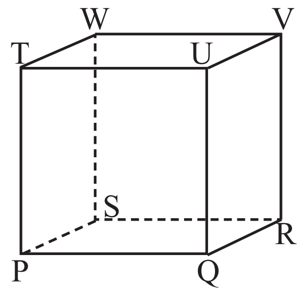
Jadi, luas bidang diagonal *CELH* adalah 80 cm^2.

Ayo Mengomunikasikan

Sajikan jawaban Anda di depan kelas. Diskusikan dengan teman-teman dan guru apabila jawaban Anda tidak sama.

Latihan 4.2

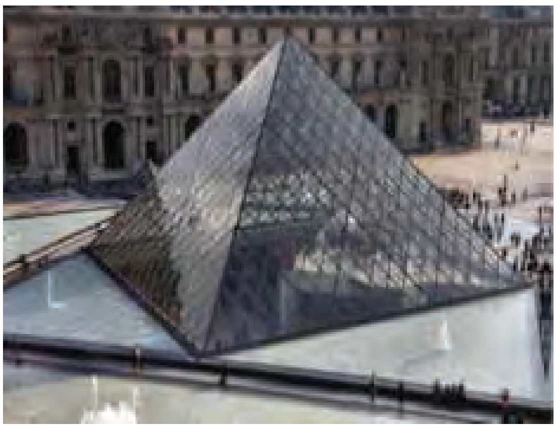
1. Perhatikan gambar kubus di bawah ini.
   a. Tentukan diagonal ruangnya!
   b. Hitung luas dari bidang diagonal yang Anda temukan apabila panjang rusuknya 5 cm!



2. Dira ingin membuat kotak aksesoris berbentuk kubus dari kertas karton. Jika luas kertas karton yang dibutuhkan 72 cm^2, berapa luas bidang diagonal pada kotak aksesoris tersebut?

3. Sebuah akuarium berbentuk balok memiliki panjang 75 cm dan tinggi 40 cm. Jika volume air di dalam akuarium tersebut adalah 33.000 cm^3, tentukan:
   a. Lebar akuarium
   b. Luas bidang diagonal akuarium

4. Anda memiliki 648 cm^2 kayu yang akan digunakan untuk sebuah tempat perlengkapan berbentuk prisma.
   a. Desain tempat perlengkapan yang memiliki volume 1.008 cm^3!
   b. Jelaskan alasan tentang desain tempat perlengkapan yang Anda buat!
   c. Tentukan luas bidang diagonal dari tempat perlengkapan yang sudah Anda buat desainnya!
5. Museum Louvre di Paris, Prancis berbentuk piramida persegi. Panjang sisi alasnya 116 meter dan tinggi salah satu sisi segitiga adalah 91,7 meter. Tentukan luas bidang diagonal dari Museum Louvre!



Sumber: Big Ideas Math Advanced 1

Pengayaan

6. Pada kubus *ABCD.EFGH*, *P* titik tengah *HD* dan *Q* pada *AE* sehingga *AQ* : *AE* = 1 : 3. Titik *R* terletak pada *BF* sehingga *BR* : *RF* = 1 : 6. Selidiki apakah *PQRG* merupakan sebuah bidang datar? Jelaskan!

Bab 5

Integral Tentu

Kompetensi Dasar Dan Pengalaman Belajar

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
1.1 Menghayati dan mengamalkan agama yang dianutnya 2.1 Menghayati perilaku disiplin, sikap kerjasama, sikap kritis dan cermat dalam bekerja menyelesaikan masalah kontekstual 2.2 Memiliki dan menunjukkan rasa ingin tahu, motivasi internal, rasa senang dan tertarik dan percaya diri dalam melakukan kegiatan belajar ataupun memecahkan masalah nyata 3.7 Memahami konsep jumlah Rieman dan integral tentu suatu fungsi dengan menggunakan fungsi-fungsi sederhana non-negatif. 3.8 Menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus untuk menemukan hubungan antara integral dalam integral tentu dan dalam integral tak tentu. 4.7 Mengolah data dan membuat model fungsi sederhana non negatif dari masalah nyata serta menginterpretasikan masalah dalam gambar dan menyelesaikan masalah dengan mengunakan konsep dan aturan integral tentu. 4.8 Mengajukan masalah nyata dan mengidentikasi sifat fundamental kalkulus dalam integral tentu fungsi sederhana serta menerapkanny adalam pemecahan masalah.	Melalui pembelajaran Integral Tertentu, siswa memperoleh pengalaman belajar: 1. Mengaproksimasi luas daerah dengan mengunakan jumlah poligon-poligon (segi empat). 2. Menemukan konsep jumlah Riemann dengan menggunakan konsep sigma dan jumlah poligon-poligon. 3. Mendefinisikan integral tentu menggunakan konsep jumlah Riemann

Biografi Bernhard Riemann

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Bernhard Riemann lahir di Breselenz, sebuah desa didekat Danneberg di Kerajaan Hanover di Jerman . Riemann merupakan anak kedua dari 6 bersaudara. Keluarga Riemann miskin dan Riemann serta saudara-saudaranya lemah serta sakit-sakitan. Meskipun hidup dalam kemiskinan dan kekurangan gizi, ayah Riemann berhasil mengumpulkan dana yang cukup untuk mengirim puteranya yang kini berusia 19 tahun ke Universitas Göttingen yang terkenal itu. Di sana, dia bertemu untuk pertama kali Carl Friedrich Gauss, yang dijuluki "Pangeran Ilmu Matematika," salah seorang matematikawan terbesar sepanjang masa. Bahkan sampai sekarang, Gauss digolongkan oleh para ahli matematika sebagai salah satu dari ketiga matematikawan paling terkenal dalam sejarah: Archimedes, Isaac Newton, dan Carl Gauss.

Hidup Riemann singkat, hanya 39 tahun. Ia tidak mempunyai waktu untuk menghasilkan karya matematika sebanyak yang dihasilkan Cauchy atau Euler. Tetapi karyanya mengagumkan untuk kualitas dan kedalamannya. Makalah-makalah matematisnya menetapkan arah baru dalam teori fungsi kompleks meprakarsai studi mendalam dari apa sekarang yang disebut topologi, dan dalam geometri memulai perkembangan yang memuncak 50 tahun kemudian dalam teori Relativitas Einstein.

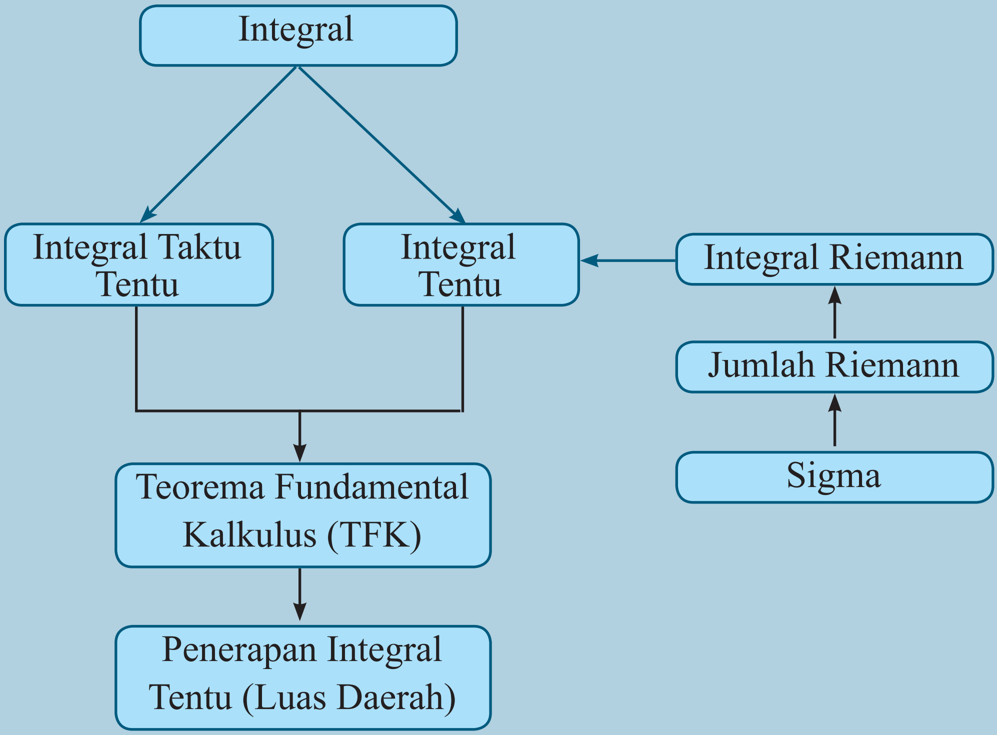
Walaupun Newton dan Leibniz keduanya mempunyai suatu versi tentang Intergal dan mengetahui tentang Teorema Dasar dari kalkulus intergal, Riemanlah yang memberi kita definisi modern tentang **Intergal Tentu**. Untuk menghormatinya, disebut **Intergal Riemann**. Riemann juga dihubungkan dengan *fungsi zeta Riemann, lema Riemann, manipol Riemann, teorema pemetaan Riemann, problem Riemann-Hilbert, teorema Rieman-Roch, persamaan Cauchy-Riemann.*

Sumber: www.thefamouspeople.com/profiles/bernhard-riemann-biography-440.php

Beberapa hikmah yang mungkin bisa kita petik, diantara:

1. Kemiskinan dan kekurangan/kelemahan fisik bukan alasan untuk berhenti belajar dan mengejar cita-cita, selama ada kemauan pasti ada jalan
2. Nilai karya seseorang tidak hanya dilihat dari kuantitas belaka karena yang tak kalah pentingnya dalah kualitas dari karya itu sendiri.

Peta Konsep

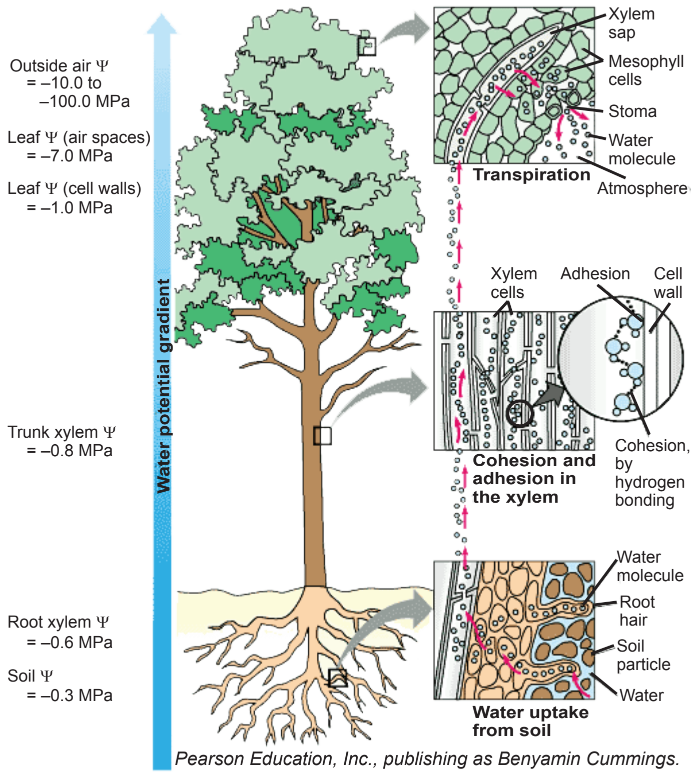

Integral
Integral Taktu Tentu
Integral Tentu
Integral Riemann
Jumlah Riemann
Sigma
Teorema Fundamental Kalkulus (TFK)
Penerapan Integral Tentu (Luas Daerah)

Subbab 5.1 Notasi Sigma, Jumlah Riemann dan Integral Tentu

Kegiatan 5.1.1 Menentukan Luas Permukaan Daun

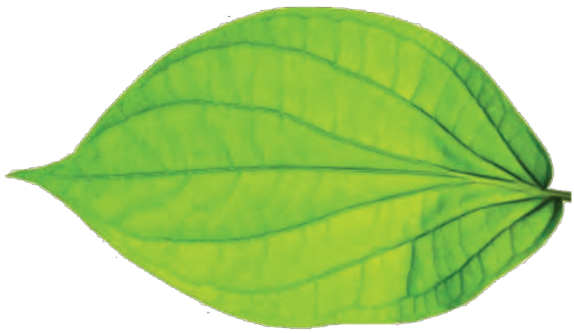
Ayo Mengamati

Secara alamiah tumbuhan mengalami kehilangan air melalui penguapan. Proses kehilangan air pada tumbuhan ini disebut transpirasi. Pada transpirasi, hal yang penting adalah difusi uap air dari udara yang lembab di dalam daun ke udara kering di luar daun. Kehilangan air dari daun umumnya melibatkan kekuatan untuk menarik air ke dalam daun dari berkas pembuluh yaitu pergerakan air dari sistem pembuluh dari akar ke pucuk, dan bahkan dari tanah ke akar. Besarnya uap air yang ditranspirasikan dipengaruhi oleh beberapa faktor, antara lain: (1) Faktor dari dalam tumbuhan (jumlah daun, luas daun, dan jumlah stomata); (2) Faktor luar (suhu, cahaya, kelembaban, dan angin).



Gambar 5. 1 Proses Transpirasi Pada Tumbuhan

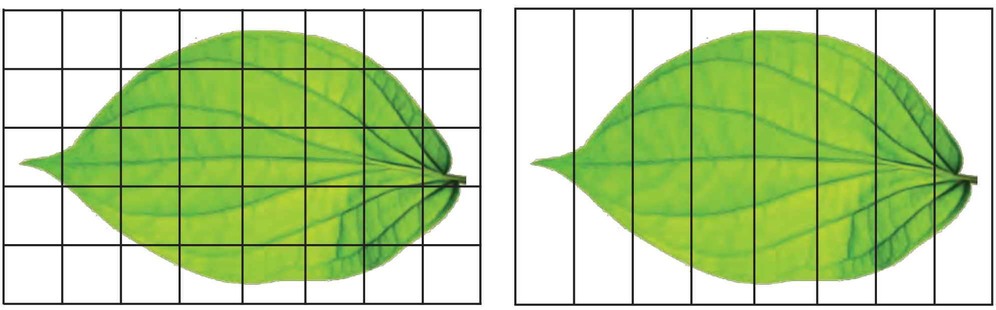
Berikut penampang salah satu daun:



Gambar 5. 2 Penampang sebuah daun

Karena luas permukaan daun merupakan faktor yang mempengaruhi laju transpirasi pada tumbuhan, maka informasi mengenai ukuran luas daun berguna untuk mengetahui laju transpirasi tersebut.

Selanjutnya, cobalah anda amati gambar permukaan daun berikut ini:



Gambar 5. 3 Dua Versi Penempatan Daun Pada Permukaan Kertas berpetak dan berkolom

Ayo Menanya

Berdasarkan hasil pengamatan/membaca informasi tentang pengaruh luas daun terhadap laju transpirasi serta Gambar 5.3, coba anda buat minimal 3 pertanyaan/dugaan awal/kesimpulan awal mengenai luas daun. Upayakan pertanyaan yang anda buat memuat kata-kata “luas daerah”, “membagi/mempartisi”, “persegipanjang” dan “nilainya paling mendekati”.

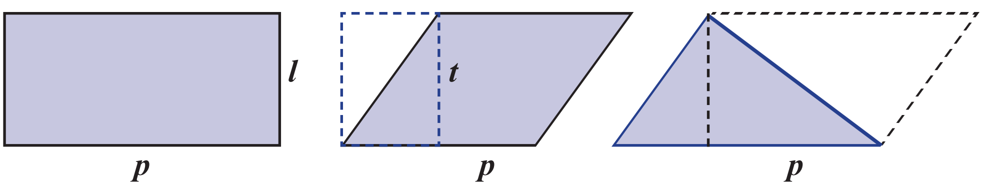
Ayo Menggali Informasi

Dari sekian banyak pertanyaan yang anda buat, mungkin ada diantaranya pertanyaan-pertanyaan berikut:

1. Bagaimana cara menghitung luas daun tersebut?
2. Konsep luas apa yang bisa diterapkan untuk menghitung luas bidang secara umum?
3. Bagaimana cara memperkirakan secara akurat ukuran luas daerah yang memiliki bentuk tak beraturan?

Untuk mengumpulkan informasi yang mendukung jawaban atas pertanyaan-pertanyaan yang anda ajukan, coba perhatikan gambar-gambar berikut ini:

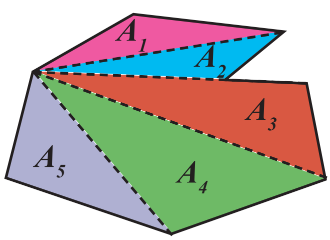
Persegipanjang | Jajarangenjang | Segitiga



$A = p \times l$ | $A = p \times t$ | $A = ½\, p \times t$

Gambar 5. 4

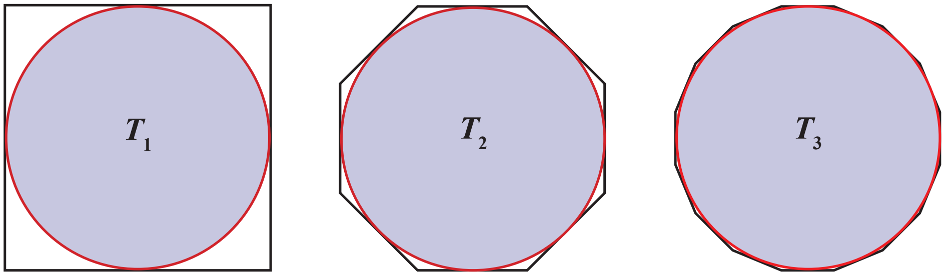
Dari Gambar 5.4, cobalah Anda cermati tentang bagaimana penentuan luas segitiga dan jajarangenjang menggunakan konsep luas persegipanjang.



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Gambar 5. 5 Poligon/segibanyak *A*

Dari Gambar 5.5, cobalah amati dan buatlah kesimpulan terkait hubungan antara luas segibanyak A dan luas segitiga-segitiga A_1, A_2, ..., A_5.

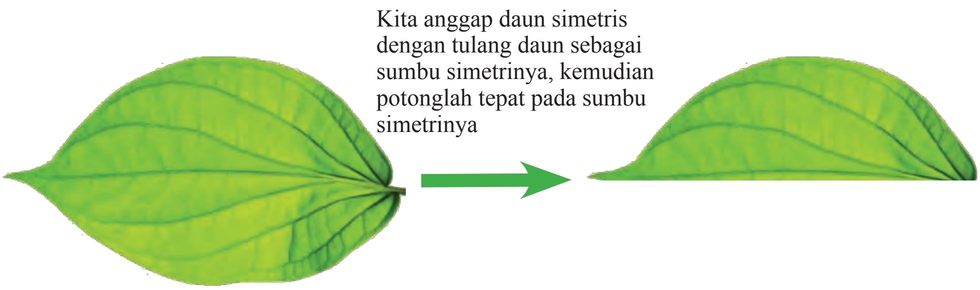


Gambar 5. 6

Dari Gambar 5.6, cobalah amati dan buatlah kesimpulan tentang hubungan antara luas lingkaran dengan luas segibanyak yang menyelimuti lingkaran tersebut.

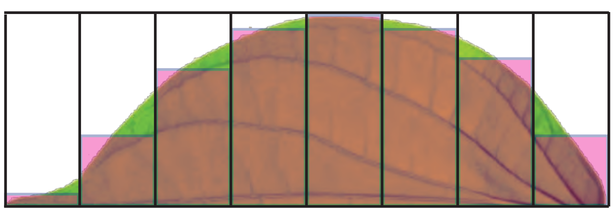
Ayo Menalar

Kembali ke masalah luas penampang daun, selanjutnya perhatikan gambar berikut:

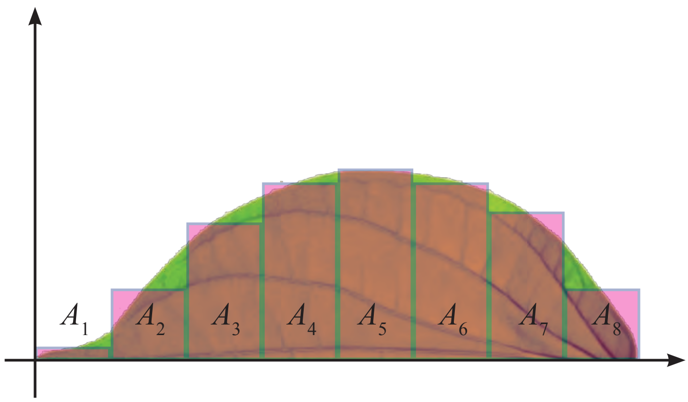


Gambar 5.7

Berdasarkan Gambar 5.7, apa yang bisa Anda simpulkan terkait luas daun awal dengan luas daun setelah dipotong? Apakah berarti untuk mencari luas daun, cukup ditentukan luas separuh daunnya, sebagai berikut:



Gambar 5. 8 Penampang Setengah Daun



Gambar 5. 9 Penempatan Setengah Daun Pada Koordinat Kartesius

Dengan demikian, luas separuh daun bisa dihitung dengan menghitung jumlah luas semua persegipanjang. Apakah luas separuh daun (A_{daun}) sama dengan jumlah semua luas persegipanjang tersebut ($A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8$)?

Ayo Menalar

Ketika Anda perhatikan jumlah luas-luas persegipanjang

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8$$

Pertanyaan menarik yang bisa Anda ajukan adalah apakah ada cara yang praktis atau singkat penulisan bentuk jumlah tersebut.

Untuk menyatakan jumlah tersebut dalam bentuk yang sederhana digunakan ***notasi sigma*** $\sum_{i=1}^{8} A_i$, yang berarti kita menjumlahkan semua bilangan dalam bentuk yang diindikasikan sebagai indeks ***i*** yang merupakan bilangan bulat, mulai dari bilangan yang ditunjukkan di bawah $\sum$ dan berakhir pada bilangan di atas $\sum$.

Contoh 5.1

Nyatakanlah bentuk jumlah $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ dalam notasi sigma.

Contoh 5.2

Nyatakanlah bentuk jumlah deret persegi $1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ dalam notasi sigma.

Contoh 5.3

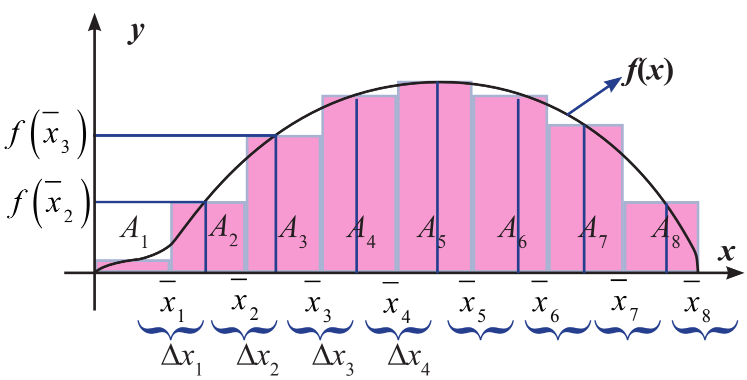
Bandingkanlah dan simpulkan pasangan nilai sigma berikut ini:

1. $\sum_{i=1}^{n} ca_i$ dan $c\sum_{i=1}^{n} a_i$

2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$ dan $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

3. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)$ dan $\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

Misalkan batas tinggi daun pada Gambar 5.9 diwakili oleh grafik fungsi $f(x)$ pada interval $[0, a]$ dengan partisi (bagian) sebanyak 8, sehingga diperoleh sketsa sebagai berikut:



Gambar 5. 10

Berdasarkan informasi pada Gambar 5.10. Lengkapilah isian berikut:

$A_1 \quad = f\left(\overline{x}_1\right)\Delta x_1$

$A_2 \quad = f\left(\overline{x}_2\right)\ldots$

$A_3 \quad = \ldots\Delta x_3$

$A_4 \quad = \ldots$

$A_5 \quad = \ldots$

$A_6 \quad = \ldots$

$A_7 \quad = \ldots$

$A_8 \quad = \ldots$

Berdasarkan konsep sigma dan jawaban anda terkait tiap-tiap luas persegipanjang dengan panjang $f(x_i)$ dan lebar Δx_i, buatlah kesimpulan terkait luas total (keseluruhan persegi yang terbentuk).

$$A_1 + A_1 + \ldots + A_1 = f\left(\overline{x}_1\right)\Delta x_1 + \ldots + f\left(\overline{x}_8\right)\Delta x_8 = \sum_{i=1}^{8} f\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i$$

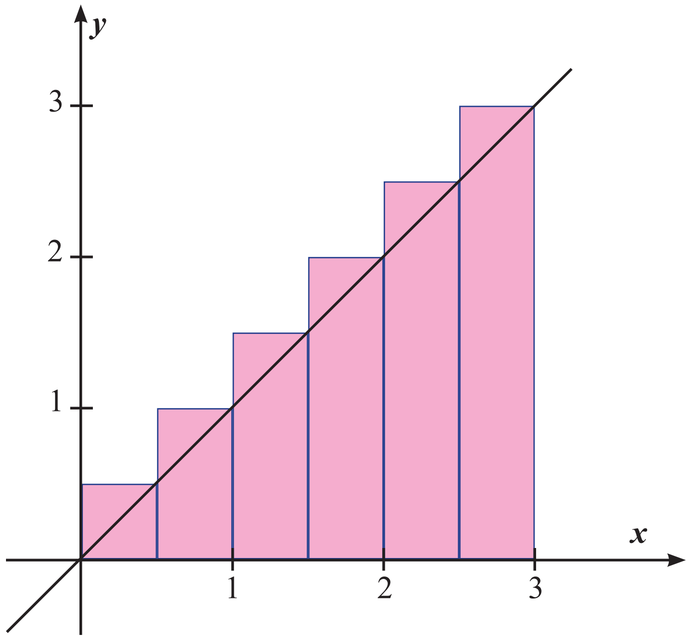
Selanjutnya nilai $\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i$ disebut ***Jumlah Riemann*** fungsi $f(x)$, dengan $\overline{x}_i$ adalah titik wakil pada interval ke-i dan Δx_i lebar interval ke-i dan n banyak subinterval.

Contoh 5.4

Misalkan diketahui suatu fungsi $f(x) = x$ pada interval [0, 3], tentukan jumlah Riemann dengan menggunakan 6 subinterval sama panjang dan titik ujung kanan subinterval sebagai titik wakil tiap-tiap subinterval.

Alternatif Penyelesaian

Untuk dapat menentukan jumlah Riemann fungsi $f(x) = x$ dengan 6 subinterval pada selang [0, 3], perhatikan grafik fungsi $f(x) = x$ pada interval [0, 3], berikut:



Gambar 5.11

Dengan demikian didapat,

$f\left(\bar{x}_1\right) = f\left(0,5\right) = 0,5$

$f\left(\bar{x}_2\right) = \ldots$

$f\left(\bar{x}_3\right) = \ldots$

$f\left(\bar{x}_4\right) = \ldots$

$f\left(\bar{x}_5\right) = \ldots$

$f\left(\bar{x}_6\right) = \ldots$

Karena lebar subinterval sama berarti $\Delta x_i = \dfrac{3-0}{6} = \dfrac{1}{2}$ = 0,5 untuk setiap i = 1, ..., 6

Jadi jumlah Riemann dari $f(x) = x$ pada interval [0, 3] dengan 6 subinterval adalah

$$\sum_{i=1}^{6} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i = f\left(\bar{x}_1\right)\Delta x_1 + f\left(\bar{x}_2\right)\Delta x_2 + f\left(\bar{x}_3\right)\Delta x_3 + f\left(\bar{x}_4\right)\Delta x_4 + f\left(\bar{x}_5\right)\Delta x_5 + f\left(\bar{x}_6\right)\Delta x_6$$

$$\sum_{i=1}^{6} f\left(\bar{x}_1\right)\Delta x_i =$$

$$= f\left(\bar{x}_1\right)\Delta x + f\left(\bar{x}_2\right)\Delta x + f\left(\bar{x}_3\right)\Delta x + f\left(\bar{x}_4\right)\Delta x + f\left(\bar{x}_5\right)\Delta x + f\left(\bar{x}_6\right)\Delta x$$

$$= \left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + f\left(x_3\right) + f\left(x_4\right) + f\left(x_5\right) + f\left(x_6\right)\right)\Delta x$$

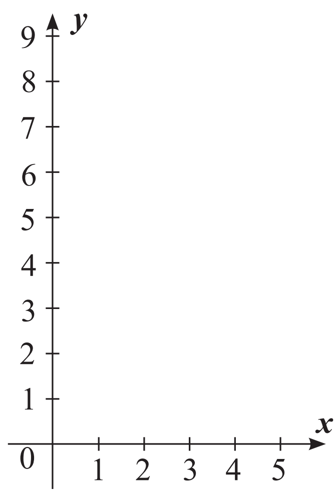
$$= \ldots$$

Contoh 5.5

Misalkan diketahui suatu fungsi $f(x) = x^2$ pada interval [0, 3], tentukan jumlah Riemann dengan menggunakan 6 subinterval sama panjang dan titik ujung kanan subinterval sebagai titik wakil tiap-tiap subinterval.

Alternatif Penyelesaian

Untuk dapat menentukan jumlah Riemann dari $f(x) = x^2$ dengan 6 subinterval pada interval [0, 3], dengan menggunakan cara penyelesaian pada Contoh 5.14, gambarlah grafik fungsi $f(x) = x^2$ pada interval [0, 3] dan 6 persegipanjang sebanyak 6 dengan lebar sama dan tinggi persegipanjang sebesar nilai fungsi pada batas kanan subinterval berikut:



Gambar 5.11

Karena panjang subinterval sama berarti $\Delta x_i = \dfrac{3-0}{6} = \dfrac{1}{2}$ = 0,5 untuk setiap i = 1, ..., 6

Jadi jumlah Riemann dari $f(x) = x^2$ pada interval [0, 3] dengan 6 subinterval adalah

$$\sum_{i=1}^{6} f\left(\bar{x}_1\right)\Delta x_i$$

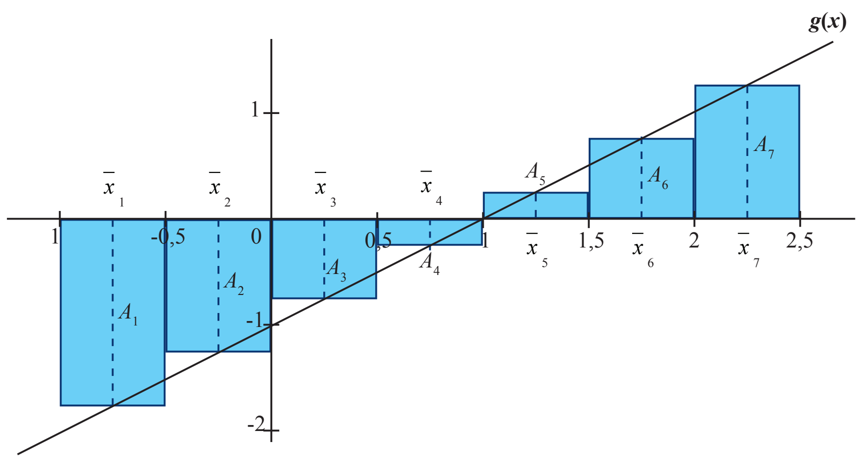
$$= f\left(x_1\right)\Delta x + f\left(x_2\right)\Delta x + f\left(x_3\right)\Delta x + f\left(x_4\right)\Delta x + f\left(x_5\right)\Delta x + f\left(x_6\right)\Delta x$$

$$= \left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + f\left(x_3\right) + f\left(x_4\right) + f\left(x_5\right) + f\left(x_6\right)\right)\Delta x$$

= ...

Contoh 5.6

Bila diperhatikan fungsi pada Contoh 5.15 merupakan fungsi positif (mengapa?). Sketsakan fungsi $g(x) = x - 1$ pada interval [–1, 2] memakai 7 subinterval dan titik tengah subinterval sebagai titik wakilnya, buatlah kesimpulan tentang hubungan antar jumlah Riemann dengan jumlah luas persegipanjang (A_i) yang terbentuk.



Gambar 5.12

Jumlah Riemann dari $(x) = x - 1$ pada interval $[-1, 2]$ adalah

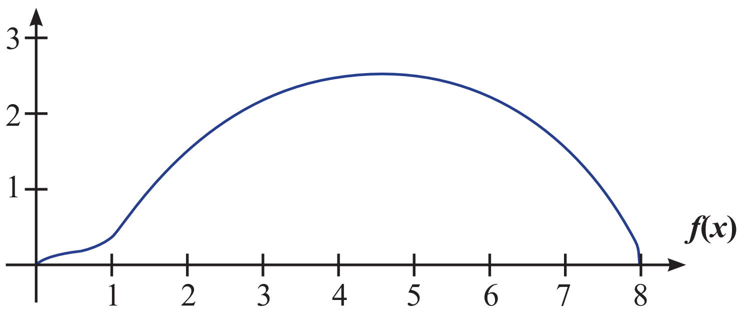
$$\sum_{i=1}^{7} g\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i =$$

$$g\left(\overline{x}_1\right)\Delta x_1 + g\left(\overline{x}_2\right)\Delta x_2 + g\left(\overline{x}_3\right)\Delta x_3 + g\left(\overline{x}_4\right)\Delta x_4 + g\left(\overline{x}_5\right)\Delta x_5 + g\left(\overline{x}_6\right)\Delta x_6 + g\left(\overline{x}_7\right)\Delta x_7$$

$$= A_1 + \ldots + \ldots + \ldots + A_5 + \ldots + \ldots$$

Alternatif Penyelesaian

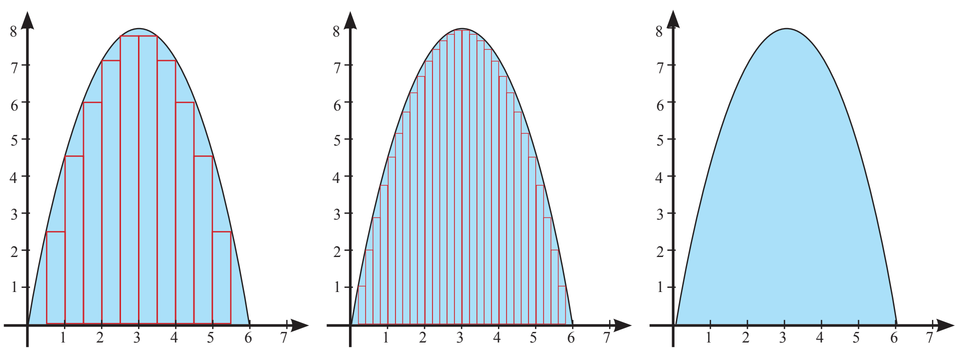
Kembali ke pembahasan tentang menentukan luas daun yang diwakili oleh luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $f(x)$ dan sumbu-x pada interval $[0, a]$, seperti yang terlihat pada gambar berikut:



Gambar 5. 13

pertanyaan menarik yang bisa diajukan adalah apakah jumlah luas semua persegi panjang yang terbentuk sama dengan luas separuh daun yang ingin dicari? Jika tidak, bagaimana menghitungnya agar nilainya sama?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut perhatikan gambar berikut ini:



Gambar 5. 14

Cobalah buat kesimpulan terkait daerah di bawah kurva dengan luas seluruh persegi panjang yang dibentuk dengan berbagai kondisi (panjang persegipanjang makin mengecil).

Dengan menggunakan hasil kesimpulan anda, gabungkan dengan konsep limit tak hingga, yakni:

$$\lim_{n\to\infty} g(n)$$

Misalkan dalam hal ini $g(n)$ merupakan jumlah Riemann oleh $f(x)$ dengan n subinterval.

Buatlah kesimpulan terkait luas daun atau luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi f dan sumbu-x:

Dengan demikian luas setengah daun tersebut (A_{daun}) adalah:

$$A_{daun} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_1\right)\Delta x_i$$

Selanjutnya $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_1\right)\Delta x_i$ disebut ***Integral Tentu*** fungsi $f(x)$ pada interval $[0, a]$, ditulis $\int_0^a f(x)\, dx$.

Contoh 5.7

Misalkan diberikan suatu fungsi $f(x) = x$, tentukan integral tentu dari $f(x) = x$ pada interval [0, 3] atau $\int_0^3 x\, dx$

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan integral tentu dari fungsi $f(x) = x$ pada interval [0, 3], maka yang perlu dilakukan pertama kali adalah menentukan jumlah Riemann dari fungsi $f(x) = x$ dengan n subinterval pada interval tersebut (mengapa?)

Dengan demikian perlu menetapkan: panjang masing-masing subinterval dan Titik wakil pada masing-masing subinterval ($\bar{x}_i$).

- Panjang masing-masing subinterval ($\Delta \bar{x}_i$) dibuat sama (apa boleh berbeda? mengapa dibuat sama?), yakni:

  $\Delta x_i = \dfrac{3-0}{n} = \dfrac{3}{n}$, untuk setiap $i = 1, ..., n$
- Kita bisa memilih titik wakilnya ($\bar{x}_i$) adalah titik batas kanan pada tiap-tiap interval (apa boleh ujung kiri/ tengah-tengah interval?), sehingga didapat:

$$\bar{x}_1 = x_1 = 0 + \Delta x_1 = 0 + \frac{2}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\bar{x}_2 = x_2 = 0 + 2 \cdot \Delta x_1 = 0 + 2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$

$$\bar{x}_3 = x_3 = \ldots$$

$$\bar{x}_4 = x_4 = \ldots$$

$\ldots$

$$\bar{x}_i = x_i = \ldots$$

$\ldots$

$$\bar{x}_n = x_n = \ldots$$

Jumlah deret aritmatika, deret kuadrat dan kubik dalam notasi sigma
$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 4 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 + 8 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Sehingga nilai fungsi pada tiap-tiap titik wakilnya diperoleh:

$$f\left(\overline{x}_1\right) = f\left(x_i\right) = x_i = \ldots$$

Dengan demikian jumlah Riemannnya adalah

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i = f\left(\overline{x}_1\right)\Delta x_1 + f\left(\overline{x}_2\right)\Delta x_2 + \ldots + f\left(\overline{x}_n\right)\Delta x_n$$

Karena subinterval sama panjang $\Delta x_i = \Delta x = \dfrac{3}{n}$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$

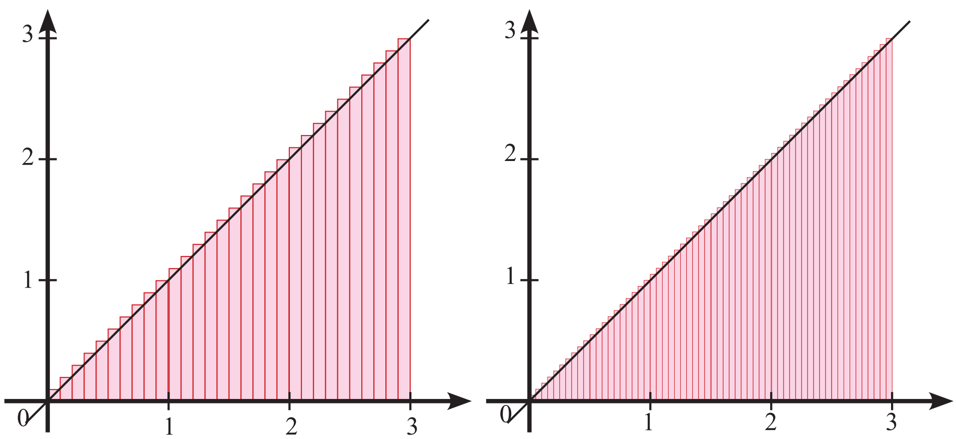
sehingga $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x$

$$= f\left(x_1\right)\Delta x_1 + f\left(x_2\right)\Delta x_2 + \ldots + f\left(x_n\right)\Delta x_n = \left(f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + \ldots + f\left(x_n\right)\right)\frac{3}{n}$$

$$= \ldots$$

Dengan demikian diperoleh jumlah Riemann untuk fungsi $f(x) = x$ pada interval [0, 3] adalah

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i = \ldots$$



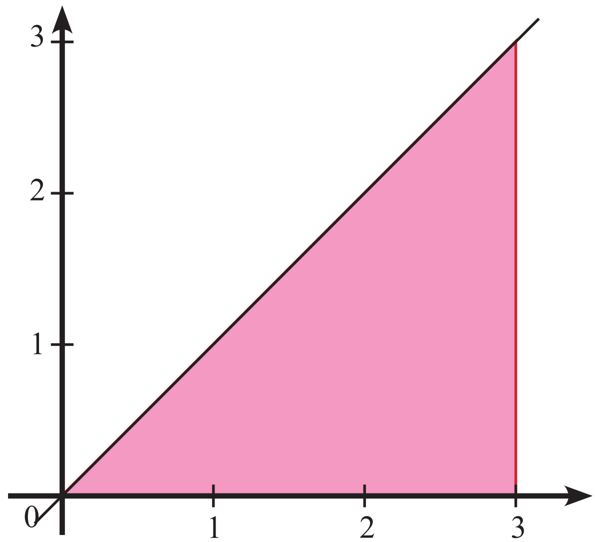
Gambar 5.16

Jadi integral tentu dari $f(x) = x$ pada interval [0, 3] atau $\int_0^3 x\,dx$ adalah $\int_0^3 x\,dx$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_1\right)\Delta x_i = \ldots$$

Contoh 5.8

Dengan menggunakan Jumlah Rienmann, tentukan luas daerah yang diarsir pada gambar berikut:



Gambar 5.15

Contoh 5.9

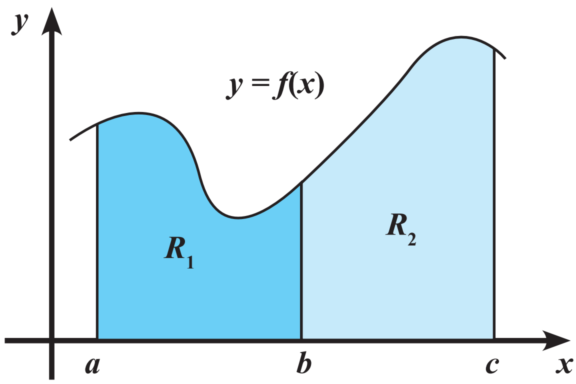
Misalkan diberikan suatu fungsi $f(x) = x^2$, tentukan integral tentu dari $f(x) = x^2$, pada interval [0, 2] atau $\int_0^2 x^2 dx$.

Alternatif Penyelesaian

Anda bisa menggunakan langkah-langkah penyelesaian pada Contoh 5.17 atau menggunakan langkah-langkah penyelesaian sendiri. Anda bisa mulai dengan menggambarkan grafik fungsi pada interval yang diberikan, selanjutnya tentukan nilai integral tentunya.

Contoh 5.10

Perhatikan daerah R yang merupakan gabungan dari daerah R_1 dan R_2 yang diarsir pada gambar berikut:



Tentukan luas daerah R, R_1 dan R_2 dan nyatakan hubungan antara antara luas R dengan luas total R_1 dan R_2 dalam persamaan integral.

Dari hasil mengasosiasi, buatlah kesimpulan umum terkait:

a. Notasi Sigma dan Sifat-sifatnya

b. Jumlah Rieman untuk fungsi f

c. Integral Tentu untuk fungsi f yang didefinisikan pada interval tutup $[a, b]$

d. Luas daerah di atas sumbu-x dan dibatasi oleh grafik fungsi positif f pada interval $[a, b]$ dan nilai integral tentu $\int_a^b f(x)dx$.

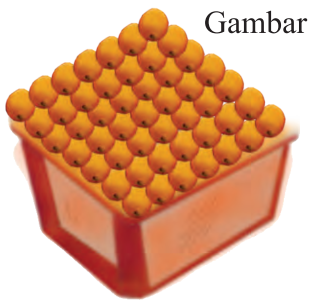
Ayo Mengomunikasikan

Tuliskanlah kesimpulan yang Anda dapatkan terkait jumlah Riemann dan integral tentu untuk fungsi *f* yang didefinisikan pada interval tutup [*a, b*]. Tukarkan tulisan tersebut dengan teman sebangku/kelompok lainnya. Secara santun, silahkan saling berkomentar, menanggapi komentar, memberikan usul dan menyepakati ide-ide yang paling tepat.

Latihan 5.1

1. Perhatikan gambar berikut:

Gambar 1

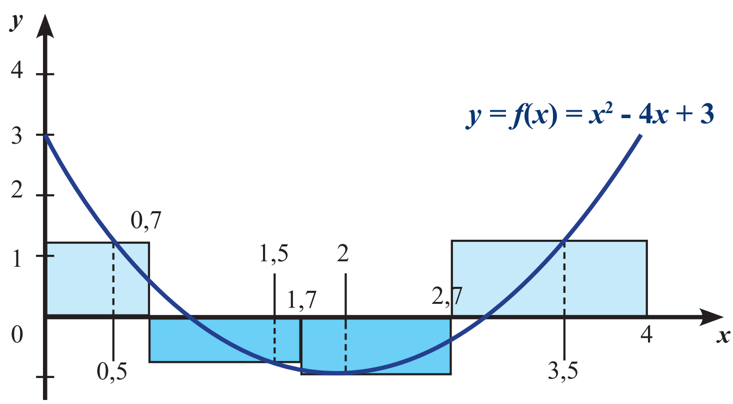


Sumber : Kemendikbud

a. Nyatakan masalah banyaknya jeruk yang disajikan pada Gambar 1 dalam notasi sigma.

b. Tentukan banyaknya jeruk yang disusun di atas kotak seperti yang terlihat pada Gambar 1.

2. Tentukan jumlah Riemann dari fungsi yang diperlihatkan oleh gambar berikut



Gambar 2

3. Tentukan jumlah Riemann fungsi $f(x) = -x^2 + x$ pada interval $[-2, 0]$ dengan menggunkan 4 subinterval dengan lebar sama panjang dan titik-titik ujung kiri subinterval sebagai titik wakilnya.

4. Tentukan jumlah Riemann fungsi $g(x) = -2x + 4$ pada interval $[1, 5]$ (menggunakan n subinterval dengan lebar sama panjang).

5. Tentukan integral tentu fungsi $f(x) = 2x^2 - x$ pada interval $[0, 3]$ atau $\int_0^3 2x^2 - xdx$.

6. Tentukan integral tentu $\int_{-2}^{2} 2xdx$.

7. Nyatakan limit berikut sebagai suatu integral tentu

   a. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{4i}{n}}\frac{4}{n}$

   b. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n}$

   c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\cos(\frac{\pi}{n}) + \cos(\frac{2\pi}{n}) + \cos(\frac{3\pi}{n}) + \ldots + \cos(\frac{n\pi}{n})\right)$

   d. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n^4} + \frac{n+2}{n^4} + \frac{n+3}{n^4} + \ldots + \frac{2n}{n^4}\right)$

8. Tunjukkan bahwa $\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$

9. Gunakan definisi jumlah Riemann, untuk menunjukkan bahwa:

   a. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{dx} = 0$

   b. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,\ a > b$

Subbab 5.2 Teorema Fundamental Kalkulus.

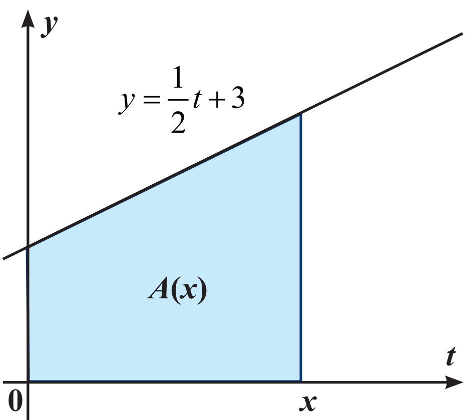
Anda telah mempelajari tentang integral tentu pada subbab sebelumnya. Untuk menentukan nilai integral tentu menggunakan jumlah Riemann, ternyata memerlukan langkah yang rumit. Newton dan Leibniz telah menemukan cara yang lebih mudah dalam menentukan nilai integral tentu. Cara tersebut dikenal sebagai Teorema Fundamental Kalkulus (TFK).

Pada uraian berikut, Anda akan belajar tentang teorema fundamental kalkulus. Teorema fundamental kalkulus terdiri atas teorema fundamental kalkulus I dan teorema fundamental kalkulus II. Teorema ini banyak digunakan dalam masalah terapan, misalnya mencari luas suatu daerah yang dibatasi oleh kurva. Seperti apa teorema fundamental kalkulus itu? Silahkan Anda pelajari dalam uraian berikut.

Kegiatan 5.2.1 Teorema Fundamental Kalkulus I

Ayo Mengamati

Contoh 5.11



Gambar 5.11

Diberikan daerah yang dibatasi oleh garis $y=\frac{1}{2}t+3$, $t=0$, $t=x$. Daerah yang diarsir membentuk trapesium. Dengan menggunakan rumus luas trapesium didapat,

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2}(3+\frac{1}{2}x+3)x \\ &= 3x+\frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

Jika $A(x)$ diturunkan, maka diperoleh:

$$A'(x) = 3+\frac{2}{4}x = 3+\frac{1}{2}x .$$

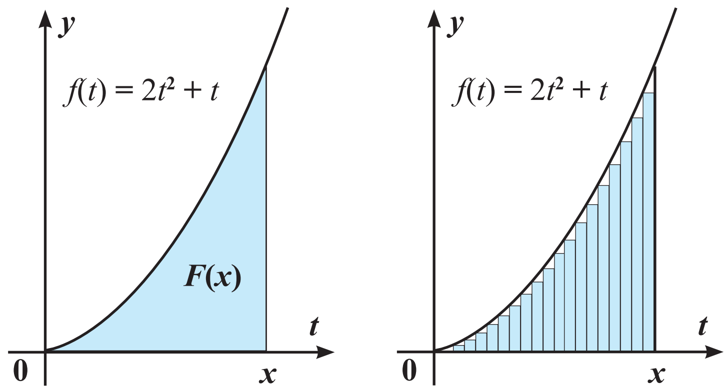
Luas daerah tersebut dapat dinyatakan dengan $\int_0^x \frac{1}{2}t + 3\,dt$, sehingga

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x + \frac{1}{4}x^2\right) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{2}t + 3\,dt = \frac{1}{2}x + 3$$

dengan kata lain $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{2}t + 3\,dt = \frac{1}{2}x + 3$

Contoh 5.12

Misalkan luas daerah pada gambar di bawah dinyatakan sebagai fungsi $F(x)$.



(a) (b)

Gambar 5.12 Luas daerah yang dibatas oleh $f(t) = 2t^2 + t$, sumbu-x dan garis $t = x$.

Dengan mempartisi interval tersebut menjadi n subinterval sama panjang (Gambar 5.2.1b), panjang subinterval $\Delta t = \frac{x-0}{n} = \frac{x}{n}$, maka bentuk integral tentunya adalah:

$$\begin{aligned}
\int_0^x 2t^2 + t\,dt &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{ix}{n}\right)\frac{x}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2\left(\frac{ix}{n}\right)^2 + \frac{ix}{n}\right)\frac{x}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\left(2\frac{x^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n}\left(2\frac{x^2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{x}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^3}{n^3}\frac{(2n^3+3n^2+n)}{3}+\frac{x^2}{n}\frac{(n+1)}{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2x^3}{3}+\frac{x^3}{n}+\frac{x^3}{3n^2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2n}\right)$$

$$= \frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$$

Oleh karena $F(x) = \int_0^x 2t^2 + t\,dt$, maka

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right) = \frac{d}{dx}\int_0^x 2t^2 + t\,dt = 2x^2 + x$$

Dengan kata lain $\frac{d}{dx}\int_0^x 2t^2 + t\,dt = 2x^2 + x$

Dari Contoh 5.11 dan Contoh 5.12 di atas, diperoleh $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{2}t + 3\,dt = \frac{1}{2}x + 3$

dan $\frac{d}{dx}\int_0^x 2t^2 + t\,dt = 2x^2 + x$. Hubungan inilah yang disebut teorema **fundamental kalkulus I**.

Ayo Menanya

Setelah mengamati Contoh 5.11, Contoh 5.12 coba Anda membuat pertanyaan. Mungkin Anda akan bertanya: Seperti apa bentuk umum teorema fundamental kalkulus I itu? Sekarang, buatlah pertanyaan-pertanyaan pada tempat berikut ini.

Ayo Menggali Informasi

Seperti apakah bentuk umum teorema fundamental kalkulus I? Untuk memahami lebih jelas perhatikan kembali Contoh 5.11 dan Contoh 5.12 di atas. Dari kedua contoh tersebut diperoleh kesimpulan

1. $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{2}t+3\,dt = \frac{1}{2}x+3$

2. $\dfrac{d}{dx}\int_0^x 2t^2+t\,dt = 2x^2+x$

Misalkan $\frac{1}{2}t+3 = f(t)$, maka $f(x) = \frac{1}{2}x+3$ sehingga

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{2}t+3\,dt = \frac{1}{2}x+3$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$$

Dengan cara yang sama, misal $2t^2+t = g(t)$, maka $g(x) = 2x^2+x$ sehingga

$$\frac{d}{dx}\int_0^x 2t^2+t\,dt = 2x^2+x$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x g(t)\,dt = g(x)$$

Untuk lebih meyakinkan dugaan Anda, mintalah kepada Guru Anda beberapa fungsi yang kontinu di (a, b). Misalkan x ∈ (a, b), carilah $\int_a^x f(t)\,dt$ dari tiap-tiap fungsi tersebut. Selidikilah, apakah diperoleh kesimpulan yang sama dengan Contoh 5.11 dan 5.12?

Teorema Fundamental Kalkulus I (TFK I)
Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan x sebarang titik di (a, b), maka

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Ayo Menalar

Sebagai seorang pelajar yang berfikir logis, tentunya kalian tidak percaya begitu saja dengan suatu pernyataan. Pernyataan tersebut harus dibuktikan terlebih dahulu baru dipercaya kebenarannya. Sekarang, marilah kita buktikan kebenaran dari teorema fundamental kalkulus I tersebut. Sebelumnya perlu diingat kembali tentang sifat penambahan interval pada integral tentu. jika f adalah fungsi yang terintegralkan pada interval yang memuat a, b, dan c, maka

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Bukti Teorema Fundamental Kalkulus I

Didefinisikan $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$$\begin{aligned} F(x+h) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1)} \end{aligned}$$

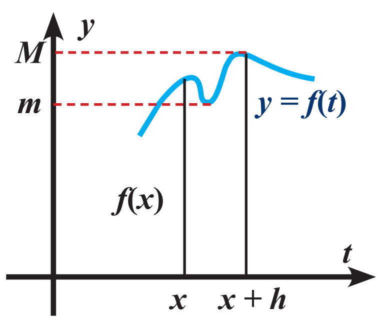
Didapat

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Misalkan m = minimum $f(x)$ untuk x di $[a, b]$

M = maksimum $f(x)$ untuk x di $[a, b]$

berdasarkan gambar di samping diperoleh



Sumber: Calculus 9th

$$mh \leq \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \leq Mh$$

$$mh \leq F(x+h) - F(x) \leq Mh$$

$$m \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq M \quad \text{..} \quad \mathbf{(2)}$$

$$\lim_{h\to 0} m \leq \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq \lim_{h\to 0} M$$

$\lim\limits_{h\to 0} m = f(x)$ dan $\lim\limits_{h\to 0} M = f(x)$, sehingga $f(x) \leq \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x)$

Dengan menggunakan teorema apit didapat $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$

Karena $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{d}{dx} F(x) = \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\,dt$

Disimpulkan bahwa $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\,dt = f(\text{x})$

Nah, sekarang cobalah untuk memberi alasan pada persamaan **(1)** dan persamaan **(2)** di atas.

Ayo Mengomunikasikan

Dari pengamatan Anda melalui contoh dan bukti tentang teorema fundamental kalkulus I buatlah kesimpulan. Tulislah kesimpulan yang Anda buat pada selembar kertas. Kemudian tukarkan kesimpulan Anda dengan teman yang lain. Cermati kesimpulan teman Anda, kritisi, tanyakan dan berikan saran perbaikan jika dianggap perlu.

Kegiatan 5.2.2 Teorema Fundamental Kalkulus II

Ayo Mengamati

Pada subbab sebelumnya Anda telah mempelajari integral tentu dengan menggunakan jumlah Riemann. Untuk menghitung integral tentu dengan menggunakan jumlah Riemann dibutuhkan langkah yang panjang dan agak rumit. Amati dengan cermat beberapa bentuk integral tentu berikut diambil dari subbab sebelumnya.

Tabel 5.2.1. Fungsi dan integral tentunya.

$f(x)$	$\int_a^b f(x)\,dx$ (Dengan Jumlah Riemann)	$F(x)$	$F(a)$	$F(b)$	$F(b)-F(a)$
x	$\int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$	$\frac{x^2}{2}+C$	C	$\frac{9}{2}+C$	$\frac{9}{2}$
x^2	$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$	$\frac{x^3}{3}+C$	C	$\frac{8}{3}+C$	$\frac{8}{3}$
$-2x+4$	$\int_1^5 -2x+4\,dx = -8$	$-x^2+4x+C$	$3+C$	$-5+C$	-8
$2x^2-x$	$\int_0^3 2x^2-x\,dx = \frac{27}{2}$	$\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C$	C	$\frac{27}{2}+C$	$\frac{27}{2}$

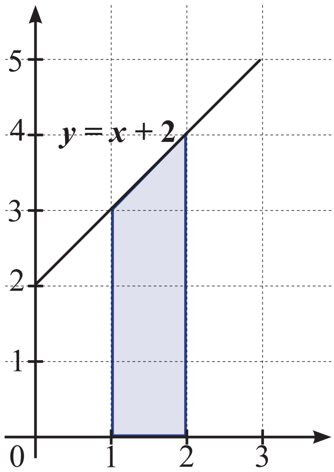
Contoh 5.13

Tentukan $\int_1^2 x+2\,dx$.

Alternatif Penyelesaian

daerah yang diarsir pada gambar berikut adalah representasi $\int_1^2 x+2\,dx$ yang membentuk trapesium. Luas daerah tersebut adalah

$$L = \frac{1}{2}(3 + 4)\cdot 1 = \frac{7}{2}$$



Gambar 5.14

Nah sekarang akan kita coba membuat proses yang sama dengan Tabel 5.2.1.

$f(x) = x + 2$, sehingga $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

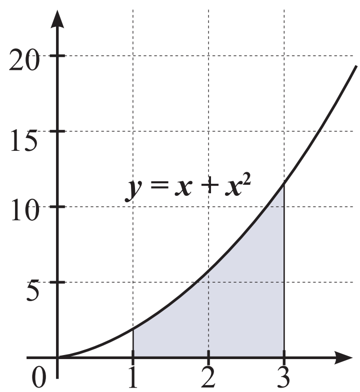
$F(1) = \frac{1}{2} + 2 + C = \frac{5}{2} + C$ dan

$F(2) = 2 + 4 + C = 6 + C$

$F(2) - F(1) = 6 + C - \left(\frac{5}{2} + C\right) = \frac{7}{2}$

Contoh 5.14

Tentukan integral tentu $\int_1^3 x + x^2 dx$.



Gambar 5.15

Daerah yang diarsir pada gambar di atas adalah representasi $\int_1^3 x + x^2 dx$.

Untuk menghitung $\int_1^3 x + x^2 dx$ digunakan jumlah Riemann. Misalkan interval tersebut dipartisi menjadi n subinterval dengan lebar subinterval yang sama, yaitu $\Delta x = \frac{2}{n}$, sehingga $x_i = 1 + \frac{2i}{n}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}+\left(\frac{2i}{n}+1\right)^2\right)\frac{2}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{n}+\frac{12i}{n^2}+\frac{8i^2}{n^3}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n}+\frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i+\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{12}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(4+6+\frac{6}{n}+\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}\right)\\
&= 10+\frac{8}{3}=\frac{38}{3}
\end{aligned}
$$

Jadi $\int_1^3 x+x^2 dx=\frac{38}{3}$

Nah sekarang akan kita coba membuat proses yang sama dengan Tabel 5.2.1.

$f(x)=x+x^2$, sehingga $F(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+C$

$F(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+C=\frac{5}{6}+C$ dan $F(3)=\frac{9}{2}+9+C=\frac{27}{2}+C$

$F(3)-F(1)=\frac{27}{2}+C-\left(\frac{5}{6}+C\right)=\frac{38}{3}$

Ayo Menanya

Setelah mengamati dengan cermat Tabel 5.2.1 dan beberapa contoh di atas, mungkin Anda mempunyai dugaan dan pertanyaan-pertanyaan. Mungkin pertanyaan Anda sebagai berikut:

1. Apa hubungan antara kolom (1) dengan kolom (3) pada Tabel 5.2.1?
2. Adakah keterkaitan antara turunan dan integral tak tentu pada Tabel 5.2.1?

3. Apakah hasil pada kolom (2) dan kolom (6) pada Tabel 5.2.1 selalu sama untuk sebarang fungsi $f(x)$?
4. Apakah konstanta C di kolom (3) pada Tabel 5.2.1 dapat diabaikan?

Tulislah dugaan dan pertanyaan-pertanyaan Anda pada kotak berikut:

Teorema Fundamental Kalkulus II (TFK II)

Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan F antiturunan f pada $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Perlu Anda cermati, bahwa TFK II ini berlaku apabila f merupakan fungsi kontinu pada $[a, b]$.

$F(b) - F(a)$ dinotasikan $\left[F(x)\right]_a^b$, sehingga TFK II dapat dinyatakan sebagai

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Contoh 5.15

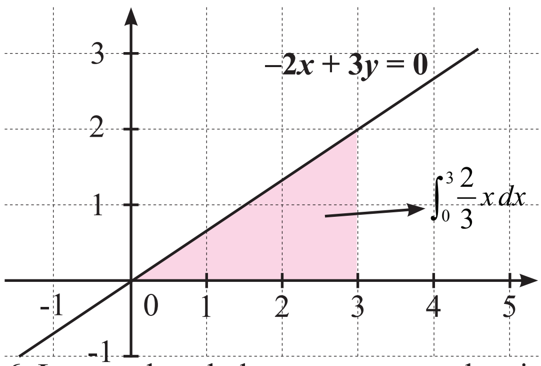
Gunakan TFK II untuk menentukan $\int_1^3 2x\,dx$

Alternatif Penyelesaian

$$\int_1^3 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8$$

Contoh 5.16

Luas daerah yang dibatasi oleh garis $-2x+3y=0$, sumbu x, garis $x = 0$ dan $x=3$ dapat dinyatakan dalam bentuk integral tentu $\int_0^3 \frac{2}{3}x\,dx$. Luas daerah yang terbentuk adalah $\left[\frac{1}{3}x^2\right]_0^3 = \frac{1}{3}3^2 - \frac{1}{3}0^2 = 3$



Gambar 5.16. Luasan daerah dengan menggunakan integral tentu.

Alternatif Penyelesaian

Luasan daerah pada Gambar 5.16 di atas ternyata dapat dicari dengan integral tentu $\int_0^3 \frac{2}{3}x\,dx$. Hal ini sesuai dengan luas daerah dengan menggunakan rumus luas segitiga. Dari Gambar 5.16 di atas, panjang alas segitiga adalah 3 dan tingginya 2. Sehingga luas segitiga tersebut $L = \frac{1}{2}a \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$.

Ayo Menggali Informasi

Buatlah beberapa soal tentang integral tentu. Tukarkan soal yang Anda buat dengan teman Anda. Kemudian selesaikan soal yang telah ditukar. Anda dapat menggunakan integral Riemann, TFK I dan TFK II dalam menyelesaikan soal. Secara santun, diskusikan jawaban tiap-tiap soal. Jika ada hal yang tidak Anda mengerti, silahkan minta bantuan dari Guru Anda.

Ayo Menalar

Anda telah mempelajari Teorema Fundamental Kalkulus I (TFK I). Hal penting dari TFK I adalah $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. Sekarang kita gunakan TFK I. untuk membuktikan TFK II.

Misalkan $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
Hal ini berarti $g(x)$ adalah antiturunan dari f. .... (1)
Oleh karena itu, jika $F(x)$ adalah antiturunan lain untuk f, $F(x)$ dan $g(x)$ hanya dibedakan oleh suatu konstanta C, sehingga dapat dinyatakan sebagai:

$$F(x) = g(x) + C$$

akibatnya

$F(a) = g(a) + C$ dan $F(b) = g(b) + C$ .... (2)

$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ dan $g(b) = \int_a^b f(t)\,dt$ .... (3)

Sehingga

$$F(b) - F(a) = g(b) + C - (g(a) + C) = g(b) + C - g(a) - C = g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Diperoleh kesimpulan $\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a)$.

Sekarang berilah alasan pada langkah (1), (2), dan (3) pada pembuktian TFK II.

Misalkan $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, Hal ini berarti $[a, b]$ adalah antiturunan dari f.
Alasannya :

$F(a) = g(a) + C$ dan $F(b) = g(b) + C$

Alasannya :

$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ dan $g(b) = \int_a^b f(t)\,dt$

Alasannya :

Ayo Mengomunikasikan

Dari aktivitas dan pengamatan yang telah Anda lakukan, buatlah kelompok yang beranggotakan 4 orang. Kemudian tulislah kesimpulan tentang teorema fundamental kalkulus II. Tukarkan hasil kesimpulan Anda dengan kelompok lain. Amati dan cermati kesimpulan kelompok lain. Kritisi, tanyakan dan beri saran jika diperlukan.

Latihan 5.2

1. Tentukan $G'(x)$ jika:

   a. $G(x) = \int_1^x 3t\ dt$

   b. $G(x) = \int_x^1 3t\ dt$

   c. $G(x) = \int_1^x \sin t^2\ dt$

   d. $G(x) = \int_1^x \cos \sqrt{t}\ dt$

2. Diketahui fungsi f yang $f(x) = \int_1^x \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\ du$, dan $x \geq 0$. Tentukan interval sehingga grafik $y = f(x)$:

   a. naik

   b. turun

   c. cekung ke atas.

3. Tentukan f jika:

   a. $\int_1^x f(t)\ dt = 2x + 5$

   b. $\int_1^x f(t)\ dt = \sin x$

   c. $\int_0^x f(t)\ dt = \cos^2 x$

4. Selidiki, adakah fungsi f yang memenuhi $\int_0^x f(t)\ dt = x + 1$

5. Tentukan integral berikut.

   a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x - 3\cos 2x\, dx$

   b. $\int_{-1}^1 x^3\ dx$

   c. $\int_1^3 x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

6. Jika diketahui $\int_2^4 3x^2 - 4dx = \int_2^p 4x - 4dx$, tentukan p.

7. Tentukan nilai b jika diketahui nilai $\int_0^b 2x + \sin 2x\, dx = \dfrac{\pi^2}{4} + 1$

8. Gunakan sifat aditif pada integral tentu untuk menentukan nilai:

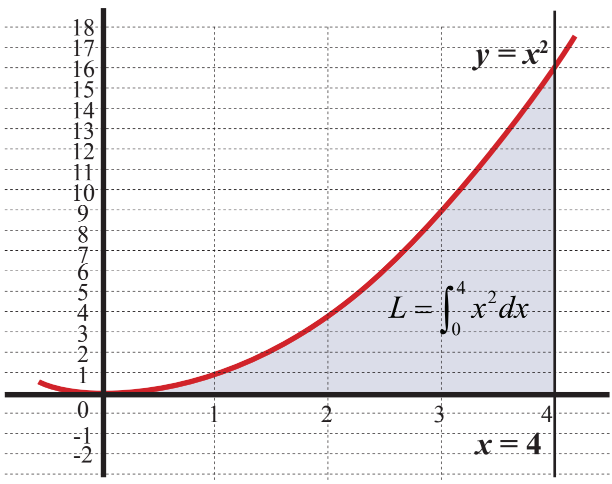
   a. $\int_{-2}^{3} |x|\, dx$

   b. $\int_{-2}^{3} |x-1|\, dx$

   c. $\int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin x|\, dx$

9. Tunjukkan bahwa $\dfrac{1}{2}x|x|$ merupakan antiturunan dari $|x|$. Gunakan hasil itu untuk menuliskan $\int_a^b |x|\, dx$ tanpa bentuk integral.

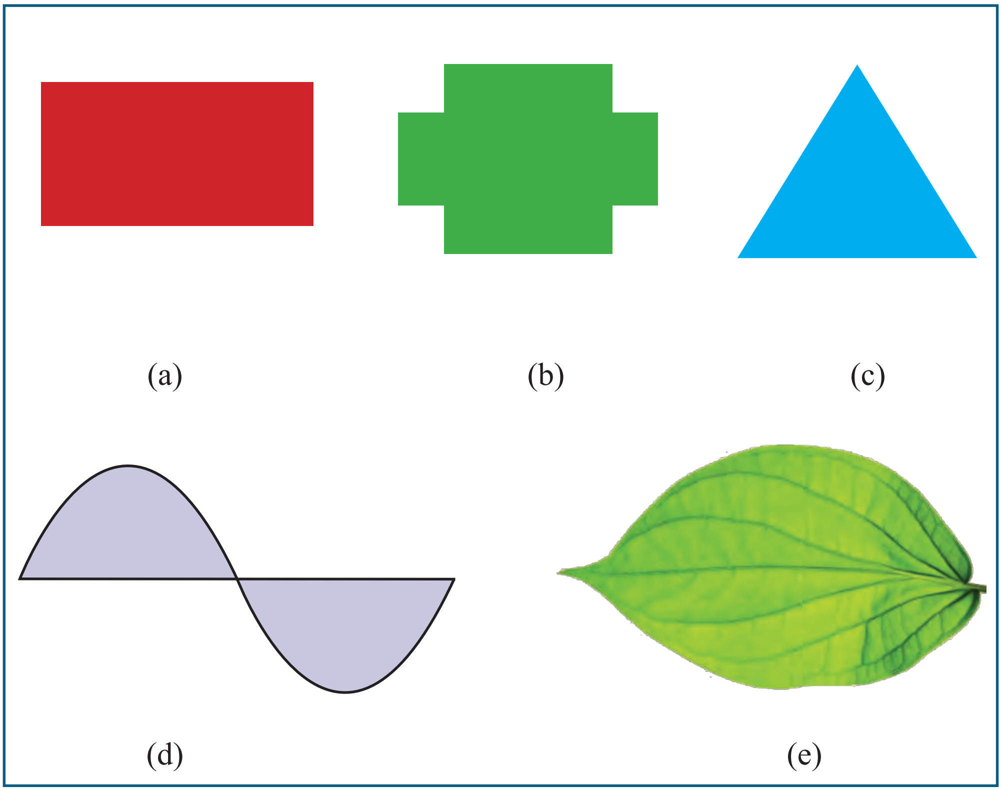
10. Luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$, sumbu-x, sumbu-y dan garis $x = 4$ adalah $\int_0^4 x^2 dx$. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh fungsi-fungsi tersebut.



Gambar 1

Subbab 5.3 Penerapan Integral Tentu

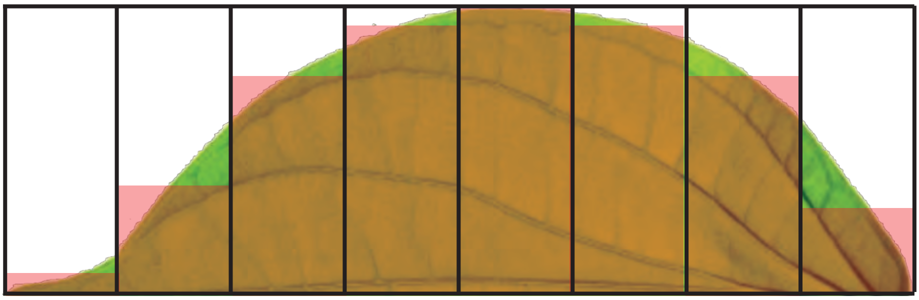
Dapatkah Anda menghitung luas daerah dari bangun berikut?



Gambar 5.17 Penampang beberapa bangun datar.

Dari beberapa bangun datar pada Gambar 5.17 dapatkah Anda menghitung luas daerahnya? Tentunya sangat mudah untuk menghitung luas daerah yang ditunjukkan Gambar 5.17.a, 5.17.b dan 5.17.c. Lantas bagaimana menghitung luas daerah yang ditunjukkan Gambar 5.17.d dan 5.17.e?

Pada uraian sebelumnya Anda telah mempelajari bagaimana cara untuk menentukan luas dari setengah daun. Perhatikan kembali masalah cara menentukan daun berikut ini.



Gambar 5.18 Penampang setengah daun

Untuk menentukan hampiran dari luas daun pada Gambar 5.18 digunakan persegi panjang-persegi panjang atau yang lazim disebut partisi. Agar hampiran dari luas penampang setengah daun ini mendekati luas sesungguhnya, partisi tersebut dibuat sebanyak mungkin. Sehingga luas penampang setengah daun tersebut dinyatakan sebagai

$$A_{daun} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i$$

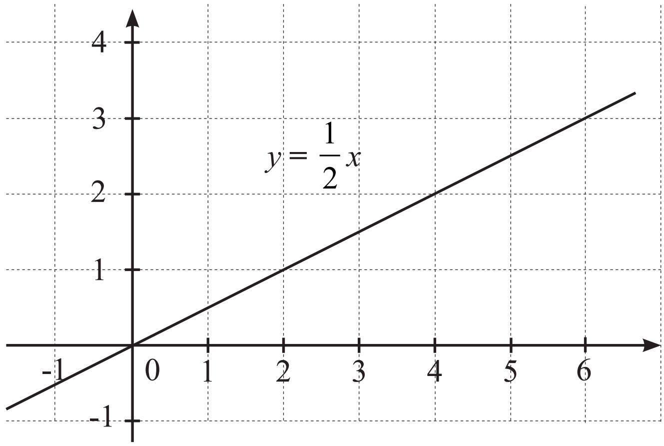
Dengan Δx menyatakan lebar subinterval. Misalkan penampang setengah daun tersebut dibatasi pada interval $[a, b]$, maka luas penampang daun dinyatakan sebagai

$$A_{daun} = \int_a^b f(x)dx$$

Ayo Mengamati

Contoh 5.17

Amatilah gambar garis $y = \frac{1}{2}x$ berikut

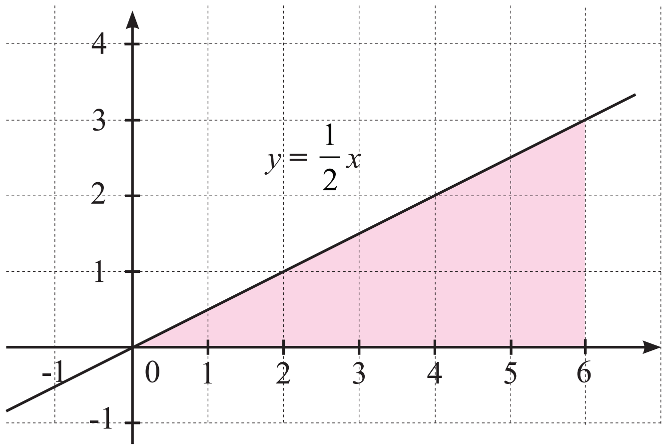


Gambar 5.19 Gambar garis $y = \frac{1}{2}x$

Dari Gambar 5.19 di atas, tentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = \frac{1}{2}x$, sumbu-x, diantara $x = 0$ dan $x = 6$

Alternatif Penyelesaian

Apabila dibuat sketsa daerah yang terbentuk oleh garis $y = \frac{1}{2}x$, sumbu-x, diantara $x = 0$ dan $x = 6$ maka diperoleh gambar berikut ini.



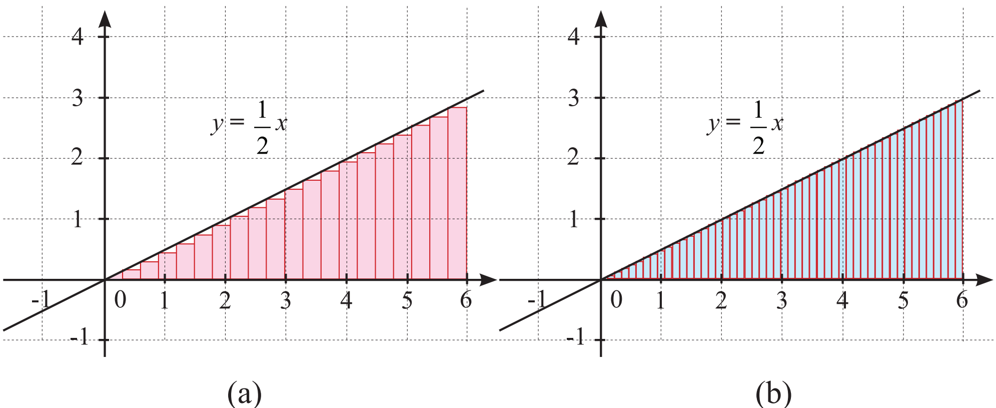
Gambar 5.20 Gambar daerah yang dibatasi $y = \frac{1}{2}x$, sumbu-x, diantara $x = 0$ dan $x = 6$

Jika diamati daerah yang terbentuk pada Gambar 5.20 adalah segitiga siku-siku dengan panjang alas 6 satuan dan tinggi 3 satuan. Dengan menggunakan aturan luas segitiga diperoleh

$$\text{Luas} = \frac{1}{2}at = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3 = 9$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh garis $y=\frac{1}{2}x, x=0, x=6$ dan sumbu-x adalah 9 satuan luas. Mungkin Anda bertanya-tanya, Apakah konsep partisi dan integral tentu dapat digunakan pada masalah ini?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut, amatilah gambar-gambar berikut.



Gambar 5.21. Daerah yang dibatasi $y=\frac{1}{2}x$, sumbu-x, di antara $x = 0$ dan $x = 6$

Daerah pada Gambar 5.21 (a) dipartisi menjadi 20 subinterval dengan panjang sama dan pada Gambar 5.21 (b) daerah dipartisi menjadi 50 subinterval dengan lebar sama. Jika partisi ini diperbanyak sampai tak hingga subinterval, maka luas daerah yang dibatasi oleh garis $y=\frac{1}{2}x, x=0, x=6$ dan sumbu-x dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\text{Luas} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_0^6 y\,dx \text{ .... (3)}$$

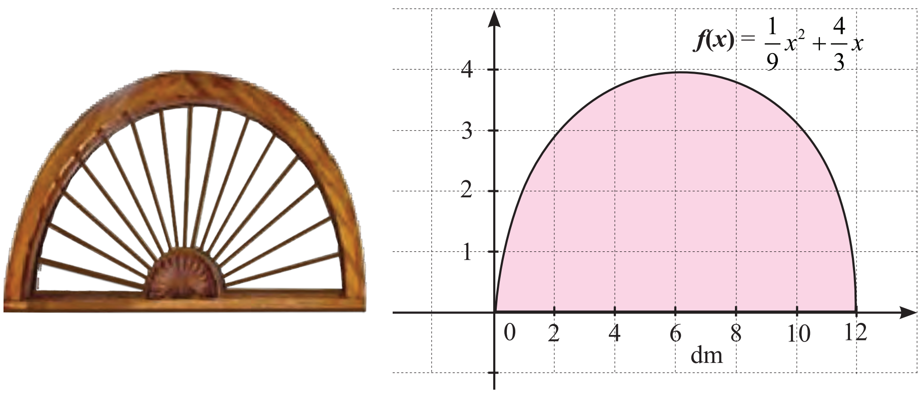
Oleh karena $y=\frac{1}{2}x$, maka persamaan (3) dapat dinyatakan sebagai

$$\text{Luas} = \int_0^6 \frac{1}{2}x\,dx = \left[\frac{1}{4}\cdot x^2\right]_0^6 = \left(\frac{1}{4}\cdot 6^2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^2\right) = 9 - 0 = 9$$

Setelah mengkaji uraian di atas, apakah Anda telah menemukan jawaban dari pertanyaan apakah konsep partisi dan integral tentu dapat digunakan untuk menentukan luas daerah yang dibatasi garis $y = \frac{1}{2}x, x = 0, x = 6$ dan sumbu-x?

Contoh 5.18

Pemilik rumah ingin mengganti bagian atas dari pintu rumahnya dengan menggunakan kaca bergambar. Bagian atas pintu tersebut dinyatakan dalam fungsi $y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, grafik dari bagian atas pintu rumah ditunjukkan pada Gambar 3.5 berikut. Biaya untuk pembuatan dan pemasangan kaca bergambar adalah Rp500.000 per meter persegi. Jika ada 6 pintu di rumahnya, berapa biaya yang harus dikeluarkan oleh pemilik rumah tersebut?



(a) (b)

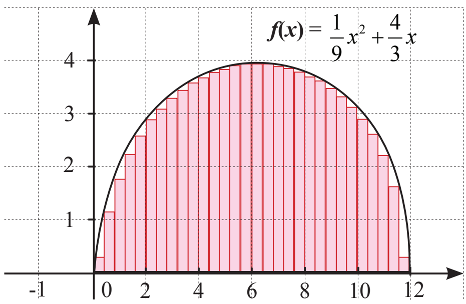
Gambar 5.22. Representasi grafik bagian atas daun pintu

Alternatif Penyelesaian

Dari Gambar 5.22 b dapat diketahui daerah yang terbentuk adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, diantara x = 0, x = 12 dan sumbu-x.

Bagaimana cara menentukan luas daerah tersebut? Coba Anda fikirkan sejenak.

Seperti pada contoh sebelumnya, untuk menentukan luas daerah yang dibatasi kurva $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, diantara x = 0, x = 12 dan sumbu-x adalah dengan mempartisi daerah tersebut kemudian menggunakan integral tentu.



Gambar 5.23 Partisi daerah dibatasi $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, diantara $x = 0, x = 12$ dan sumbu-x

Jika daerah tersebut dipartisi sampai tak hingga banyaknya subinterval, maka luas daerah dapat dinyatakan sebagai:

$$\text{Luas} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_0^{12} f(x)\,dx \quad \text{.....................................} \quad (4)$$

Dengan Δx = menyatakan panjang subinterval.

Oleh karena $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, maka luas daerahnya adalah:

$$\text{Luas} = \int_0^{12} f(x)\,dx = \int_0^{12} -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x\;dx = \left[-\frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right]_0^{12} = -\frac{12^3}{27} + \frac{2\cdot 12^2}{3} = 32$$

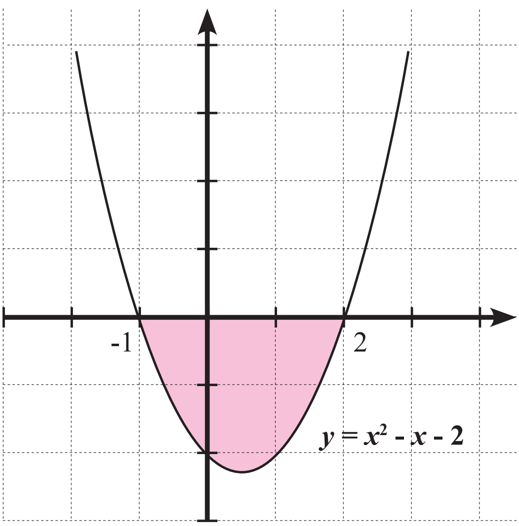
Jadi luas bagian atas untuk satu pintu adalah 32 dm^2 = 0,32 m^2. Sehingga luas bagian atas untuk 6 pintu adalah $6 \times 0{,}32 = 1{,}92$. Oleh karena biaya pembuatan dan pemasangan kaca Rp500.000/m^2 maka total biaya yang dikeluarkan adalah $1{,}92 \times 500.000 = 960.000$

Jadi total biaya yang dikeluarkan untuk pembuatan dan pemasangan kaca adalah Rp960.000,00.

Contoh 5.19

Pada Contoh 5.17 dan 5.18 grafik fungsi yang diberikan berada di atas sumbu-x. Bagaimana jika grafik yang diberikan berada di bawah sumbu-x? Untuk lebih jelasnya, carilah luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - x - 2$, $x = -1$, $x = 2$ dan sumbu-x.

Alternatif Penyelesaian



Gambar 5.24

Luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - x - 2$ dan sumbu x dinyatakan dalam gambar di samping. Daerah yang terbentuk di bawah sumbu-x. Jika daerah tersebut dipartisi sampai tak hingga banyak subinterval, maka luas daerah tersebut dinyatakan sebagai

$$\text{Luas} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} h_i \Delta x_i$$

Dengan h_i merupakan tinggi dari tiap-tiap subinterval dan Δx_i menyatakan panjang partisi. Oleh karena sumbu-x adalah garis $y = 0$, h_i dapat dinyatakan sebagai $h_i = 0 - f(x_i)$. Dengan demikian

$$\text{Luas} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} h_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} -f(x_i)\Delta x_i = -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = -\int_{-1}^{2} y\,dx$$

Oleh karena $y = x^2 - x - 2$, maka luas daerahnya adalah

$$\text{Luas} = -\int_{-1}^{2} x^2 - x - 2\, dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2}$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - x - 2$, $x = -1$, $x = 2$ dan sumbu x adalah $4\frac{1}{2}$ satuan luas.

Contoh 5.20

Diberikan fungsi $y = x^3$. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3$, garis $x = -1$ dan $x = 1$ serta sumbu-x.

Alternatif Penyelesaian

Mungkin Anda berfikiran untuk menentukan luas daerah yang dimaksud adalah

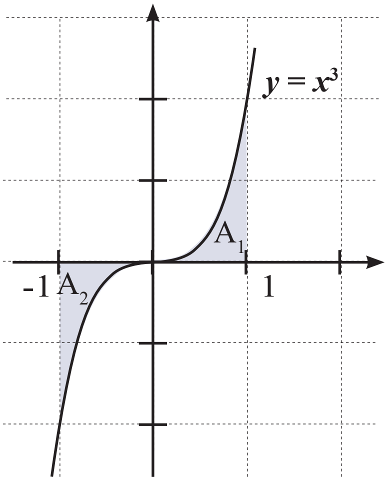
$$\text{Luas} = \int_{-1}^{1} x^3 dx .$$

Dengan menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus II, maka akan diperoleh:

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Sehingga luasnya adalah 0, hal ini tidak sesuai dengan kenyataan. Anda harus berhati-hati menyatakan luas dengan integral tentu. Setidaknya buatlah grafik dari fungsi yang diketahui, kemudian tentukan luas daerah yang dimaksud dan gunakan teknik potong(*partisi*), hampiri dan integralkan.

Luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3$, garis $x = -1$ dan $x = 1$ serta sumbu-x dinyatakan dalam daerah yang diarsir dari grafik berikut:



Gambar 5.25

Luas daerah dibagi menjadi dua bagian, A_1 dan A_2. Daerah A_1 berada di atas sumbu-x, sehingga luasnya

$$A_1 = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_0^1 x^3 dx$$

Daerah A_2 berada di bawah sumbu-x, sehingga luasnya

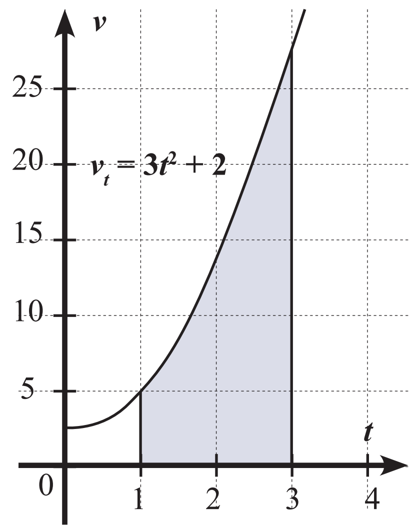
$$A_2 = -\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = -\int_{-1}^{0} x^3 dx$$

Luas daerah keseluruhan adalah luas A_1 ditambah dengan A_2.

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^3$, garis $x = -1$ dan $x = 1$ serta sumbu-x adalah $\frac{1}{2}$ satuan luas.

Contoh 5.21

Terdapat suatu grafik yang menggambarkan hubungan antara kecepatan dengan waktu. Kecepatan v pada sumbu-y sedangkan waktu t pada sumbu-x . Diketahui suatu fungsi $v_{(t)} = 3t^2 + 2$ m/s yang tergambar pada grafik. Hitunglah perubahan posisi pada selang waktu $t = 1$ hingga $t = 3$.



Gambar 5.26

Alternatif Penyelesaian

Dalam fisika, perubahan posisi dinyatakan sebagai s, dengan $s = \int v\,dt$. Representasi dari perubahan posisi pada selang waktu $t = 1$ hingga $t = 3$ adalah daerah yang diarsir pada grafik di samping. Perubahan posisi pada selang waktu $t = 1$ hingga $t = 3$ adalah

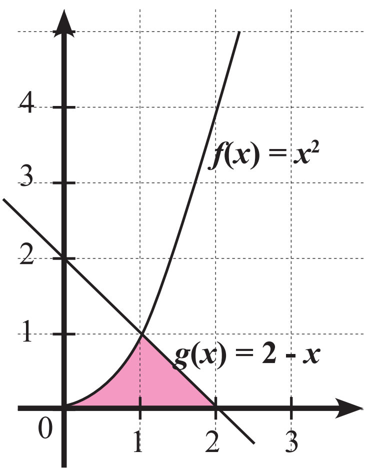
$$\int_1^3 3t^2 + 2dt = \left[t^3 + 2t\right]_1^3 = \left(3^3 + 2\cdot 3\right) - \left(1 + 2\right) = 30$$

Jadi perubahan posisi pada selang waktu $t = 1$ hingga $t = 3$ adalah 30 meter.

Contoh 5.22

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis $g(x) = 2 - x$, kurva $f(x) = x^2$, sumbu-x, sumbu-y, dan garis $x = 2$.

Alternatif Penyelesaian



Gambar 5.27

Daerah yang diarsir merupakan daerah yang dibatasi oleh garis $g(x) = 2 - x$, kurva $f(x) = x^2$, sumbu-x, sumbu-y, dan garis $x = 2$. Untuk menghitung luas daerahnya tidak bisa dengan menggunakan satu bentuk integral tentu, akan tetapi dua bentuk integral tentu. (mengapa ya? Coba lihat kembali daerah pada gambar dan berfikirlah).

Luas daerah dibagi menjadi dua, yaitu luas daerah pada interval [0, 1] disebut A_1 dan luas daerah pada interval [1, 3] disebut A_2. Sehingga luas keseluruhannya adalah

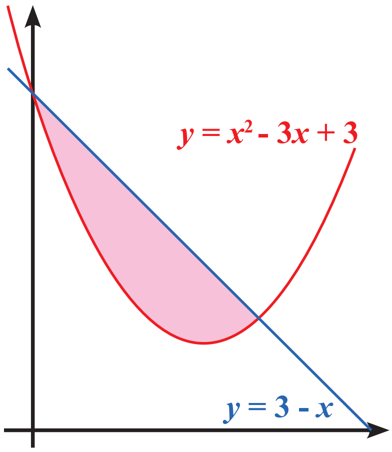
$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 2 - x\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} - 0 + 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Jadi luas daerahnya adalah $\frac{5}{6}$ satuan luas.

Contoh 5.23

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - 3x + 3$ dan $y = -2x - 3$.

Alternatif Penyelesaian



Gambar 5.28

Luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - 3x + 3$ dan $y = -2x - 3$ ditunjukkan pada daerah yang diarsir pada gambar disamping. Coba Anda amati dengan cermat gambar di samping. Mungkin Anda akan bertanya, berapa batas interval untuk gambar yang diarsir? Batas interval ini harus diketahui terlebih dahulu. Ini berarti harus dicari absis dari titik potong dua kurva tersebut.

Menentukan absis titik potong

$$y = y$$
$$x^2 - 3x + 3 = 3 - x$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x - 2) = 0$$
$$x = 0 \text{ atau } x = 2$$

Jadi batas interval daerah yang diarsir adalah [0, 2], sehingga luas daerah tersebut

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 (3 - x) - (x^2 - 3x + 3)\, dx \\ &= \int_0^2 2x - x^2\, dx \\ &= \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= \left(4 - \frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

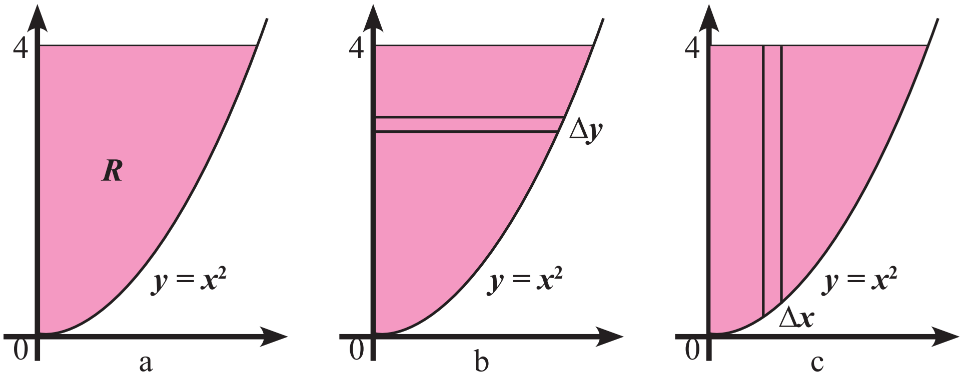
Jadi luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - 3x + 3$ dan $y = -2x - 3$ adalah $\frac{4}{3}$ satuan luas.

Contoh 5.24

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, garis $y = 4$, $y = 0$ dan sumbu-y.

Alternatif Penyelesaian

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, garis $y = 4$, $y = 0$ dan sumbu-y ditunjukkan pada gambar 5.29.a berikut:



Gambar 5.29 Luas daerah yang dibatas $y = x^2$, $y = 4$, $y = 0$ dan sumbu-y

Jika diamati dari Gambar 5.29 b dan 5.29 c, ada dua cara untuk membuat partisi, yaitu mempartisi daerah dengan horisontal (mendatar) dan vertikal (tegak).

Dipartisi secara horisontal (Gambar 5.29 b)

Misalkan luas satu partisi ΔR, maka $\Delta R \approx \sqrt{y}\,\Delta y$ (mengapa?), sehingga

$R = \int_0^4 \sqrt{y}\, dy$ (mengapa batasnya 0 sampai 4?)

$$R = \int_0^4 \sqrt{y}\, dy = \left[\frac{2}{3} y\sqrt{y}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

Dipartisi secara vertikal (Gambar 5.29 c)

Misalkan luas satu partisi ΔR, maka $\Delta R \approx (4 - x^2)\,\Delta x$ (mengapa?), sehingga

$R = \int_0^2 4 - x^2\, dx$ (mengapa batasnya 0 sampai 2?)

$$R = \int_0^2 4 - x^2\, dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Jadi luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, garis $y = 4$, $y = 0$ dan sumbu-y adalah $\frac{16}{3}$ satuan luas. Contoh 5.24 ini menunjukkan bahwa untuk menentukan luas daerah dapat dilakukan dua cara mempartisi, mempartisi secara horisontal dan vertikal. Tentunya dalam mempartisi daerah untuk menentukan luas, dipilih mana yang lebih praktis. Berdasarkan alternatif penyelesaian Contoh 5.24, disimpulkan bahwa untuk mempartisi daerah lebih praktis menggunakan partisi secara horizontal.

Contoh 5.25

Suatu tangki yang terisi penuh dapat menyimpan air sebanyak 200 liter. Tangki tersebut bocor dengan laju kebocoran $V'(t) = 20 - t$, dengan t dalam jam dan V dalam liter. Berapa liter jumlah air yang keluar antara 10 dan 20 jam saat kebocoran terjadi? Berapa lama waktu yang dibutuhkan agar tangki kosong?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $V(t)$ adalah jumlah air yang keluar karena bocor.

Jumlah air yang bocor antara 10 dan 20 jam adalah

$$V(20) - V(10) = \int_{10}^{20} V'(t)\, dt = \int_{10}^{20} 20 - t\, dt = \left[20t - \frac{1}{2}t^2\right]_{10}^{20}$$

= (400–200) – (200–50) = 200 – 150 = 50

Jadi jumlah air yang keluar karena bocor antara 10 dan 20 jam adalah 50 liter.

Saat tangki kosong, berarti jumlah air yang keluar adalah 200 liter, sehingga waktu yang dibutuhkan adalah:

$$V(t) = 200$$

$$20t - \frac{1}{2}t^2 = 200$$

$$\frac{1}{2}t^2 - 20t + 200 = 0$$

$$t^2 - 40t + 400 = 0$$

$$(t - 20)(t - 20) = 0$$

$$t = 20$$

Jadi dibutuhkan waktu 20 jam agar tangki tersebut kosong.

Contoh 5.26

Dalam bidang ekonomi, fungsi biaya marginal (MC) dirumuskan sebagai $MC = \frac{d}{dQ}TC$, dengan TC fungsi biaya total. Diketahui $MC = 2Q + 10$, jika barang diproduksi 15 unit, biaya totalnya 400, tentukan fungsi biaya totalnya.

Alternatif Penyelesaian

Oleh karena $MC = \frac{d}{dQ}TC$, maka $TC = \int MC\ dQ$, sehingga

$$TC = \int MC\ dQ = \int 2Q + 10\ dQ = Q^2 + 10Q + c$$

Untuk produksi 15 unit, biaya totalnya 400, sehingga Q

$$\begin{aligned} 400 &= (15)^2 + 10 \cdot 15 + c \\ c &= 400 - 225 - 150 \\ c &= 25 \end{aligned}$$

$$TC = Q^2 + 10Q + 25$$

Jadi fungsi biaya total yang dimaksud adalah $Q^2 + 10Q + 25$

Contoh 5.27

Fungsi kecepatan dari suatu objek adalah $V(t) = \begin{cases} 3x \text{ jika } 0 \le t \le 1 \\ 3 \quad \text{jika } 0 \le t \le 6 \end{cases}$. Anggap objek berada pada titik (0, 0) pada saat $t = 0$, carilah posisi objek pada saat $t = 5$?

Alternatif Penyelesaian

Oleh karena $V(t) = \frac{ds}{dt}$, dengan s posisi maka $s = \int V(t)\ dt$, sehingga posisi benda pada saat $t = 5$ adalah:

$$s = \int_0^5 V(t)\,dt = \int_0^1 3x\,dt + \int_1^6 3\,dt = \left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left[3x\right]_1^6 = \frac{3}{2} + 18 - 3 = 16\frac{1}{2}$$

Jadi posisi objek pada saat $t = 5$ adalah $16\frac{1}{2}$ satuan

Ayo Menanya

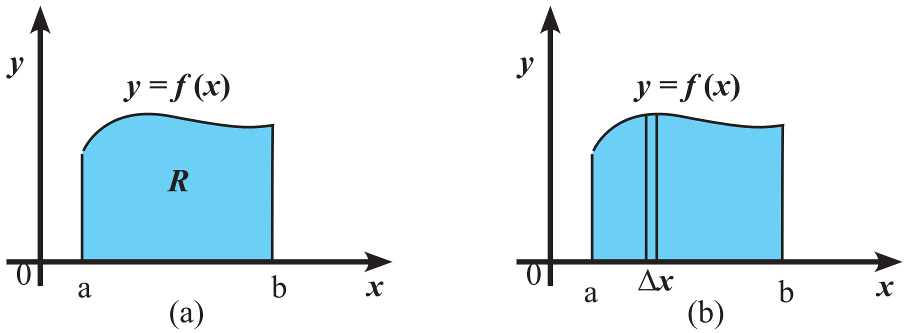
Anda telah mengamati dan mencermati penggunaan integral tentu dalam contoh 5.17 sampai dengan 5.25. Contoh-contoh tersebut terkait dengan luas daerah yang dibatasi oleh kurva. Tentunya selama mengamati contoh tersebut ada hal yang ingin Anda tanyakan. Mungkin saja salah satu dari pertanyaan Anda sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan luas daerah yang terletak di bawah sumbu-x?
2. Jika diberikan fungsi $f(x)$, $g(x)$, garis $x = a$ dan $x = b$, bagaimana menentukan luas daerah yang dibatasi oleh $f(x)$, $g(x)$, garis $x = a$ dan $x = b$?
3. Bagaimana menentukan batas interval dari suatu daerah yang terbentuk dari dua kurva?

Nah, silahkan tulis pertanyaan Anda pada kotak berikut:

Ayo Menggali Informasi

Amati luas daerah yang disajikan dalam gambar-gambar berikut.

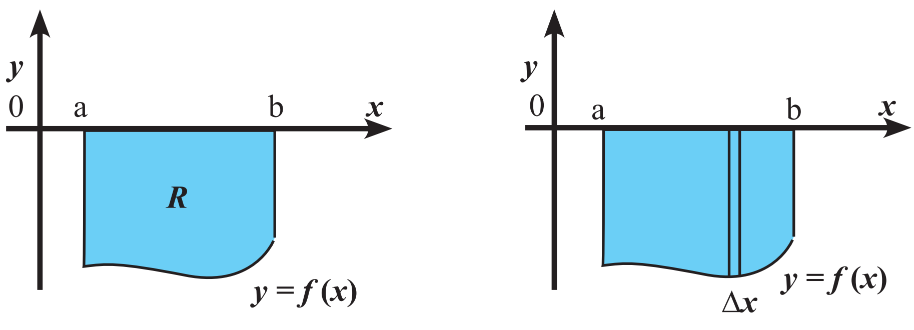


Gambar 5.30 Luas daerah di atas sumbu-x

Misalkan daerah yang terbentuk pada Gambar 5.30 dipartisi secara vertikal dengan panjang subinterval Δx dan titik sampel pada partisi $\bar{x}$. Karena titik sampel $\bar{x}$, maka tinggi partisi adalah $f(\bar{x})$. Misalkan ΔA menyatakan luas partisi, maka: $\Delta A \approx f(\bar{x})\Delta x$. Sehingga luas daerah pada Gambar 5.30 a adalah:

$$\text{Luas } R = \int_{\dots}^{\dots} \dots \, dx$$

Untuk menentukan luas daerah di bawah sumbu-x, langkahnya serupa dengan menentukan luas daerah di atas sumbu-x. Perhatikan Gambar 5.31 berikut:

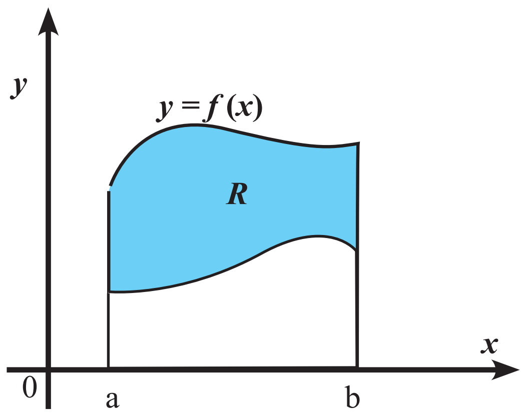


Gambar 5.31. Luas daerah di bawah sumbu-x

Misalkan daerah yang terbentuk pada Gambar 5.31 dipartisi secara vertikal dengan lebar partisi Δx dan titik sampel pada partisi $\bar{x}$. Karena titik sampel $\bar{x}$, maka tinggi partisi adalah $0 - f(\bar{x}) = -f(\bar{x})$ (ingat, sumbu-x sama artinya dengan $y = 0$). Misalkan ΔA menyatakan luas partisi, maka: $\Delta A \approx -f(\bar{x})\Delta x$. Sehingga luas daerah pada Gambar 5.31 a adalah:

$$\text{Luas } R = \int_{...}^{...} ... \, dx$$

Sekarang bagaimana untuk menentukan luas daerah yang dibentuk dari dua kurva seperti Gambar 5.32 berikut?



Gambar 5.32. Luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva

Misalkan daerah yang terbentuk pada Gambar 5.32 dipartisi secara vertikal dengan lebar partisi Δx dan titik wakil pada partisi $\bar{x}$.

Karena titik sampel $\bar{x}$, maka tinggi partisi adalah ...

Misalkan ΔA menyatakan luas partisi, maka: $\Delta A \approx$ ... Sehingga luas daerah pada Gambar 5.32 adalah:

$$\text{Luas } R = \int_{...}^{...} ... \, dx$$

Ayo Menalar

Anda telah mempelajari beberapa contoh tentang menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva dengan menggunakan integral tentu. Lakukan analisa dari beberapa contoh di atas, kemudian cobalah untuk membuat prosedur menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva. Beberapa pertanyaan berikut mungkin membantu Anda dalam membuat prosedur menentukan luas daerah.

1. Apakah sebaiknya perlu membuat sketsa daerah yang akan dicari luasnya?
2. Daerah yang akan dicari luasnya terletak di atas atau di bawah sumbu-x?
3. Apakah batas interval sudah ada? Jika belum ada bagaimana mencarinya?
4. Jika mempartisi daerah yang akan ditentukan luasnya, sebaiknya mempartisi secara horisontal atau vertikal?
5. Bagaimana memodelkan bentuk integral tentu untuk menentukan luas daerah?

Bersama dengan teman Anda, tulislah prosedur yang kalian buat.

Ayo Mengomunikasikan

Pertukarkan prosedur menentukan luas daerah yang Anda buat dengan teman yang lain. Amati dan cermati dengan seksama prosedur menentukan luas dearah yang dibuat oleh teman Anda. Secara santun, berilah masukan atau saran perbaikan kepada Anda. Kemudian mintalah pendapat teman Anda tentang prosedur menentukan luas yang telah Anda buat.

Latihan 5.3

1. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh garis-garis $y = x$, dan $y = 4 - x$ dengan
   a. menggunakan rumus luas daerah yang dipelajari di geometri
   b. menggunakan integral.

2. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 8$, dan garis-garis $y = 2x$, dan $y = -2x$.

3. a. Gambarlah grafik fungsi $y = \sin(x)$, $0 \le x \le 2\pi$ dan arsirlah daerah yang dibatasi oleh sumbu-x dan grafik fungsi y
   b. Seorang siswa menghitung luas daerah pada butir (a) sebagai berikut:

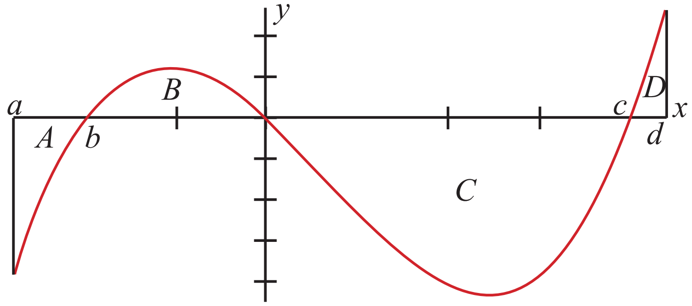
   $$\text{Luas} = \int_0^{2\pi} \sin(x)dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0))$$

   $$= -1 - (-1) = 0.$$

   Benar atau salah pekerjaan siswa tersebut? Beri alasan dari jawaban Anda.

4. Gambar 1 berikut menunjukkan grafik fungsi f. Diketahui luas daerah $A = 0{,}3$, luas daerah $B = 0{,}5$, luas daerah $C = 2{,}7$, dan luas daerah $D = 0{,}2$. Hitunglah integral berikut berdasarkan gambar dan yang diketahui

   (a) $\int_a^b f(x)dx$, (b) $\int_b^0 f(x)dx$, (c) $\int_0^c f(x)dx$, (d) $\int_c^d f(x)dx$



Gambar 1

5. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = -x^2 + 8x - 15$ dengan sumbu x.

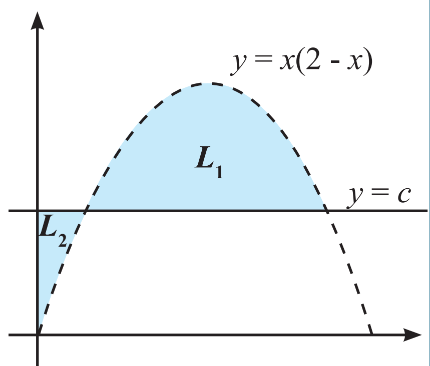
6. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = -x^2 + 8x - 15$, garis singgung parabola yang melalui puncak parabola, dan sumbu-sumbu koordinat.

7. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2 + 4$, dan garis yang melalui titik $(-1, 5)$ dan $(2, 8)$.

8. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2 + 4$ dan garis singgung-garis singgung parabola yang melalui titik $(0, 0)$.

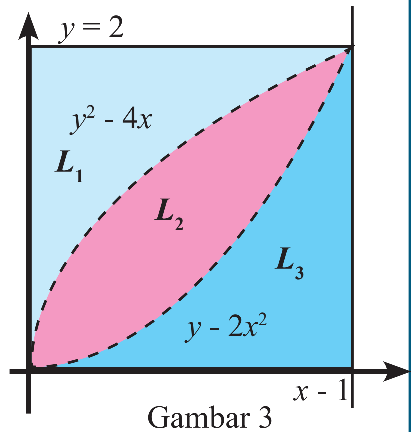
9. Diketahui garis singgung parabola $y = x^2 + ax + 4$ pada titik $x = 1$ membentuk sudut $\frac{\pi}{4}$ dengan sumbu-x. Carilah luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x + 4$ dan parabola tersebut.

10. Diberikan gambar grafik fungsi $y = x(2 - x)$ dan garis $y = c$. L_1 menyatakan daerah yang dibatasi oleh kedua grafik tersebut. Sedangkan L_2 menyatakan daerah yang dibatasi oleh kedua grafik tersebut dan sumbu-y. Tentukan nilai c sehingga luas daerah L_1 = 2 kali luas daerah L_2.



Gambar 2

11. Diberikan gambar grafik $y = 2x^2$ dan $y^2 = 4x$. L_2 menyatakan daerah yang dibatasi oleh kedua grafik tersebut. Sedangkan L_1 menyatakan daerah yang dibatasi oleh grafik $y^2 = 4x$, $y = 2$, dan sumbu-y. L_3 menyatakan daerah yang dibatasi oleh grafik $y = 2x^2$, $x = 1$, dan sumbu-x. Tentukan luas daerah L_1 dengan pengintegralan terhadap:



Gambar 3

a. variabel x b. variabel y.

Kerjakan soal yang sama terhadap L_2 dan L_3.

12. a. Gambarlah suatu daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = 9$.

    b. Tentukan koordinat titik potong antara kurva $y = x^2$ dan garis $y = c$, $0 < c < 9$, yang dinyatakan dalam c.

    c. Jika garis horizontal $y = c$ membagi daerah pada soal (a) sehingga perbandingan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, $y = 9$, $y = c$ dengan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = c$, $y = x^2$ adalah 2 : 1, maka tentukanlah nilai c.

13. a. Gambarlah daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2 - x^2$ dan $y = 2$

    b. Hitunglah luas daerah pada soal (a) dengan

    (i). Menggunakan pengintegralan terhadap variabel x

    (ii). Menggunakan pengintegralan terhadap variabel y

14. a. Gambarlah kurva $y = \sin\text{-}x$ dan $y = \cos\text{-}x$ dengan $0 \le x \le 2\pi$ pada diagram yang sama.

    b. Carilah luas daerah di kuadran I yang dibatasi oleh sumbu-y, $y = \sin\text{-}x$, $y = \cos\text{-}x$.

    c. Carilah luas daerah di kuadran I yang dibatasi oleh sumbu-x, kurva $y = \cos\text{-}x$, dan kurva $y = \sin\text{-}x$,

15. Nyatakan masing-masing limit berikut sebagai suatu integral

a. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(\cos(\frac{\pi}{n}) + \cos(\frac{2\pi}{n}) + \cos(\frac{3\pi}{n}) + \ldots + \cos(\frac{n\pi}{n})\right)$

b. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{n+1}{n^4} + \frac{n+2}{n^4} + \frac{n+3}{n^4} + \ldots + \frac{2n}{n^4}\right)$

16. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a. Gambarlah grafik fungsi f untuk $-2 \le x \le 2, x \ne 0$.

b. Pak Budi menghitung nilai integral $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2}\, dx$ sebagai berikut

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-2}^{x=2} = -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{-2}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Menurut pendapatmu, benar atau salahkah pekerjaan Pak Budi ? Jelaskan jawabanmu ! (**Petunjuk** : gunakan gambar pada (a))

17. Carilah semua nilai positif a yang memenuhi persamaan

$$\int_{0}^{a} (4x^3 + 6x + 5)dx = a^4 + 2.$$

18. Carilah semua nilai a di interval $[0, 4\pi]$ yang memenuhi persamaan

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{a} \cos x dx = \sin 2\alpha.$$

Soal-soal Pengayaan

19. Carilah nilai-nilai A, B, dan C sedemikian sehingga fungsi $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ memenuhi $f(2) = -2$, $f(1) + f^1(1) = 4$, $\int_0^1 f(x)dx = 5$.

20. Carilah nilai-nilai A, B, dan C sedemikian sehingga fungsi $f(x) = \dfrac{Ax^2 + Bx}{x+1} + Cx^2$ memenuhi $f(-2) = 12$, $f^1(0) = 2$, dan $\int_0^2 (x+1)\, f(x)\, dx = 1$.

21. Carilah semua nilai a yang memenuhi pertidaksamaan

$$\int_1^a \left(\tfrac{3}{2}x + 2\right) dx > -\frac{15}{4}.$$

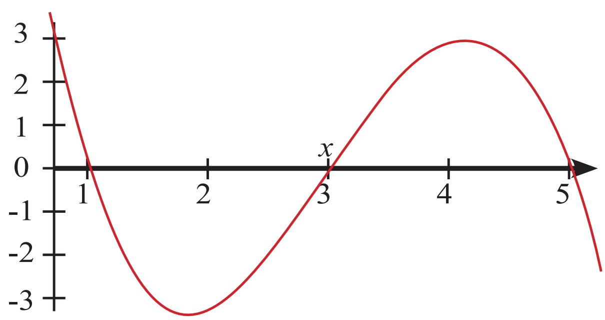
22. Tentukan $\int_0^4 |x-3|\, dx$

23. Diketahui fungsi f yang didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} |x-3|, & x \geq 0, \\ x+3, & x < 0 \end{cases}$$

Tentukan (a) $\int_0^4 f(x)\, dx$, (b) $\int_{-4}^4 f(x)\, dx$

24. Perhatikan gambar grafik fungsi f berikut



Berdasarkan gambar di atas, urutkanlah nilai $\int_1^2 f(x)dx$, $\int_1^3 f(x)dx$, $\int_1^4 f(x)dx$, dan $\int_1^5 f(x)dx$, mulai dari nilai terkecil sampai dengan nilai terbesar.

Catatan

Daftar Pustaka

Anton, H. Dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer, Versi Aplikasi, terjemahan*. Jakarta: Erlangga

Bittinger, L.M., 2010, *Elementary and Intermediate Algebra*, Boston : Pearson Eduation, Inc.

Goenawan, J. 1997. 100 *Soal dan Pembahasan Dimensi Tiga untuk Sekolah Menengah Umum*. Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia

Herawati, Tri Dewi &. N.D. *Matematika*. PT Grafindo Media Pratama.

Hirsch, Christian R., dkk. 2008. *Core-Plus Mathematics Contemporary Mathematics in ContextCourse 1 Student Edition.* New York: Mc Graw Hill.

Hosch, W.L. 2011. *The Britannica Guide to Geometry.* New York : Britannica Educational Publishing

Larson, R. and Boswell, L. *Big Ideas Math Advanced 1*. California

Murdock, Jerald; Kamischke, Ellen; and Kamischke, Eric. 2007. *Discovering Algebra, an Investigative Approach*. Key Curriculum Press.

Purcell, E.J. dan Varberg, Dale. 1987. *Calculus with Analytic Geometry, 5th Edition*. Prentice Hall, Inc.

Verberg, D., E. J. Purcell, and S. E. Steven. 2007. *Calculus 9th*. NJ: Pearson Education

Vollmar, Pamela, Edward Kemp . 2008. *Mathematics for The International Student*. Haese & Harris Publications.

Sumber-sumber internet :

1. *http//www.dreamstime.com* (Tanggal unduh 11 September 2014- jam 11.15)
2. *http//www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cramer.html* (Tanggal unduh 15 September 2014- jam 21.11)
3. *http//wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler* (Tanggal unduh 11 September 2014- jam 11.25)
4. *http//www.wikipedia.org* (Tanggal unduh 11 Oktober 2014- jam 01.35)
5. *http://bacabiografi.blogspot.com/2011/05/biografi-al-khawarizmi-ilmuan-muslim.html* (Tanggal unduh 11 Oktober 2014- jam 01.45)
5. *http//www.Perludiketahui.wordpress.com* (Tanggal unduh 02 November 2014- jam 15.55)
6. *http://goth-id.blogspot.com/2012/04/transpirasi.html* (Tanggal unduh 11 Oktober 2014- jam 01.35)
7. *http://www.thefamouspeople.com/profiles/bernhard-riemann-biography-440.php* (Tanggal unduh 09 September 2014- jam 09.45)

Glosarium

Aproksimasi	:	penghampiran
Bidang Diagonal	:	bidang yang dibatasi oleh dua rusuk dan dua diagonal bidang suatu bangun ruang
Bidang Diagonal Balok	:	bidang yang dibatasi oleh dua rusuk dan dua diagonal bidang pada balok
Bidang Diagonal Kubus	:	bidang yang dibatasi oleh dua rusuk dan dua diagonal bidang pada kubus
Bidang diagonal prisma atau limas	:	bidang yang dibatasi oleh dua diagonal bidang (bidang alas dan bidang atas) yang sejajar dan sama panjang, serta dua rusuk tegak yang sejajar atau bidang yang dibatasi oleh diagonal bidang alas dan dua rusuk bidang tegak
Bidang Diagonal Prisma Segitiga	:	bidang yang dibatasi oleh dua diagonal bidang tegak yang saling berpotongan dan satu rusuk diagonal bidang (bidang alas atau bidang atas)
Bunga Majemuk	:	bunga (uang) yang dibayarkan berdasarkan modal dan akumulasi bunga periode-periode sebelumnya.
Bunga Tunggal	:	bunga (uang) yang dibayarkan hanya berdasarkan modal yang disimpan atau dipinjam
Diagonal Ruang	:	ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan dalam suatu ruang,
Diagonal Sisi/bidang	:	ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut (bidang) yang berhadapan pada setiap bidang atau sisi

Fungsi	:	aturan yang memasangkan setiap unsur didomain ke tepat satu unsur di kodomain
Integral Tentu	:	suatu bilangan yang besarnya ditentukan dengan mengambil limit penjumlahan Riemann, yang diasosiasikan dengan partisi interval tertutup yang norma partisinya mendekati nol
Interval	:	batasan untuk suatu variabel
Invers	:	lawan atau kebalikan
Invers Matriks	:	matriks kebalikan dari suatu matriks persegi
Jumlah Riemann	:	jumlah luas-luas persegipanjang pada setiap partisi
Kesamaan Matriks	:	matriks-matriks dengan ordo sama dan elemen-elemen yang seletak dari matriks-matriks tersebut sama
Konstanta	:	representasi matematika yang berisi bilangan, variabel, atau simbol operasi yang tidak berubah nilainya
Koordinat Kartesius	:	Sistem untuk menyatakan posisi suatu titik pada sebuah bidang grafik
Matriks	:	susunan bilangan yang terdiri dari baris dan kolom
Matriks Identitas	:	matriks persegi yang semua unsur diagonalnya sama dengan 1, dan semua unsur yang lain sama dengan nol
Matriks persegi	:	matriks dengan banyak baris sama dengan banyak kolom
Ordo matriks	:	ukuran matriks, banyaknya baris dan kolom suatu matriks

Partisi (subinterval)	: bagian dari interval
Persegipanjang	: Suatu segi empat yang mempunyai empat sudut siku-siku
Relasi	: memasangkan anggota himpunan satu ke himpunan lain
Sigma	: jumlah dari bilangan-bilangan
Suku Bunga	: prosentase dari modal yang dibayarkan beberapa kali dalam periode tertentu (biasanya per tahun)
Teorema	: pernyataan yang harus dibuktikan kebenarannya
Transpose matriks	: matriks yang diperoleh dengan menukar baris menjadi kolom dan sebaliknya.